Biometric Systems and
Multimedia Forensics LAB

Esercizi di
Teoria dei Segnali

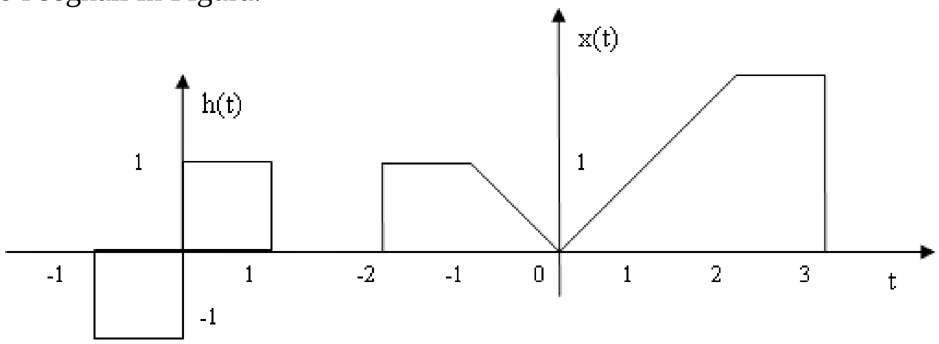
Università degli Studi “Roma Tre”
Dipartmento di Ingegneria
Sezione di Elettronica Applicata

Prof. Patrizio Campisi
Dr. Emanuele Maiorana
biomedia4n6.uniroma3.it/teaching/teoria_dei_segnali.html

v. 11.2 Settembre 2016

ESERCIZIO 1 (ESAME DEL 21/11/2001)

Si considerino i segnali in Figura:

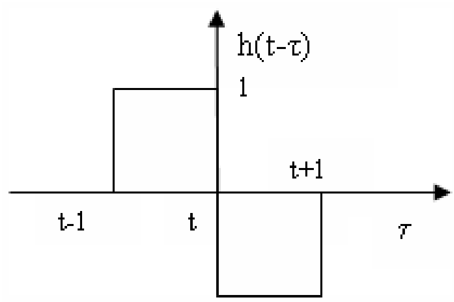


Si calcoli il segnale y(t) = x(t) $*$ h(t) ottenuto dalla convoluzione dei due segnali dati.

SVOLGIMENTO:

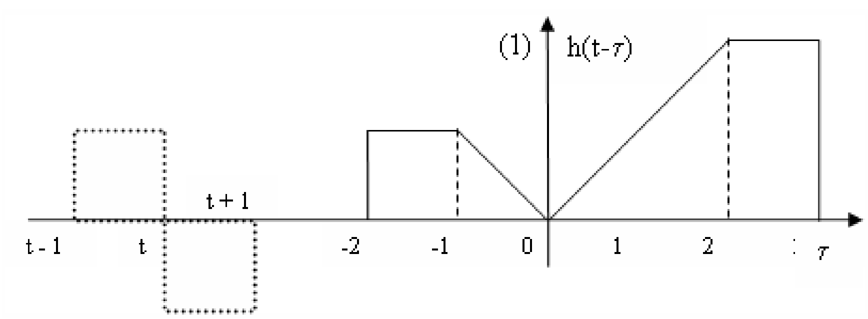
Calcoliamo il segnale h(t-τ) partendo proprio dalla definizione d'integrale di convoluzione, ottenuto per via grafica dal ribaltamento del segnale rispetto allo zero e ad una successiva traslazione pari alla quantità "t" (convenientemente supposta negativa).

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

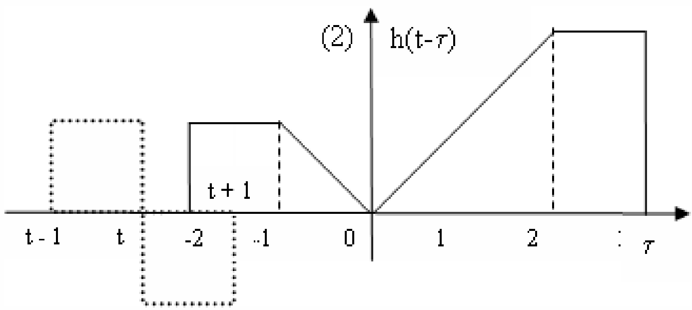


Per convolvere i due segnali occorre far scorrere il segnale h(t-τ) da sinistra verso destra sul segnale x(t), si individuano gli intervalli utili e per ognuno di essi si calcola l'integrale di convoluzione.

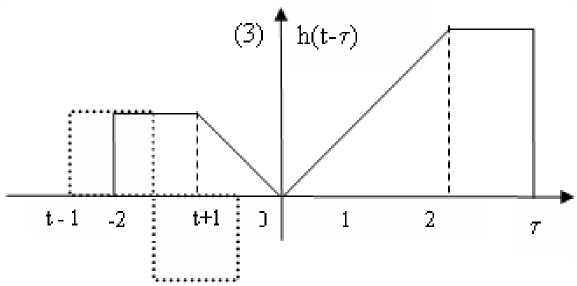
(1) $t+1<-2 \quad \rightarrow t<-3$ non si ha alcuna sovrapposizione dei segnali, pertanto $y(t)=0$



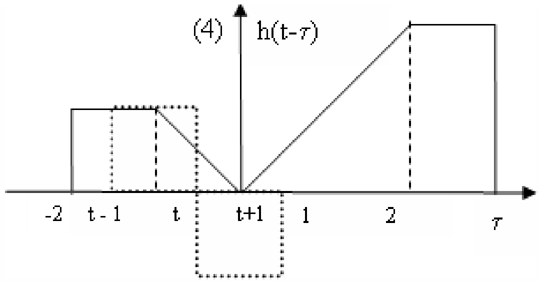
(2) $-2<t+1<-1 \quad \rightarrow \quad -3<t<-2$ si calcola l'integrale $y(t)=\int_{-2}^{t+1} -1 d\tau = -t-1-2=-t-3$



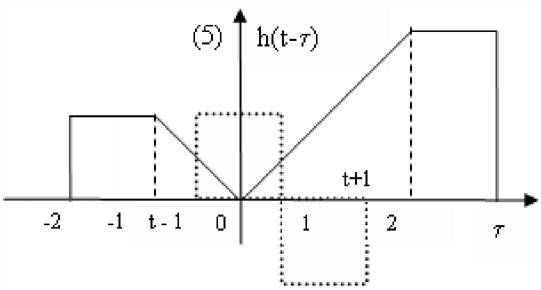
(3) $-2<t<-1$ si calcola l'integrale $y(t)=\int_{-2}^{t} d\tau + \int_{t}^{-1} -d\tau + \int_{-1}^{t+1} -1(-\tau)d\tau = \ldots = \frac{t^2}{2}+3t+3$



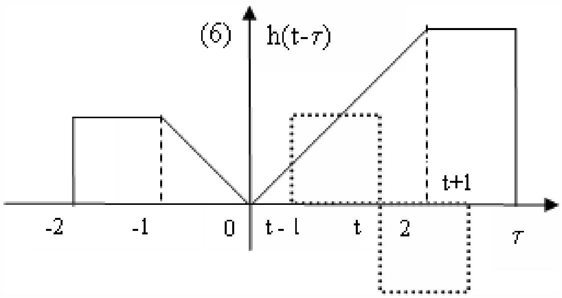
(4) $-1<t<0$ si calcola l'integrale $y(t)=\int_{t-1}^{-1} d\tau + \int_{-1}^{t} -\tau d\tau + \int_{t}^{0} \tau d\tau + \int_{0}^{t+1} -\tau d\tau = \ldots = -\frac{3t^2}{2}-2t$



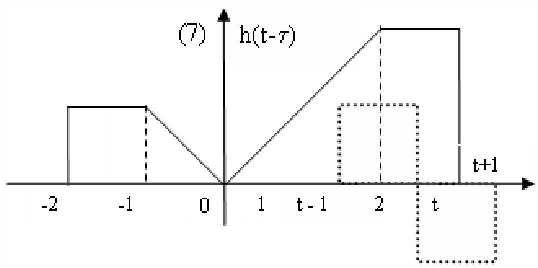
(5) $0<t<1$ si calcola l'integrale $y(t)=\int_{t-1}^{0} -\tau d\tau + \int_{0}^{t} \tau d\tau + \int_{t}^{t+1} -\tau d\tau = \ldots = t^2-2t$



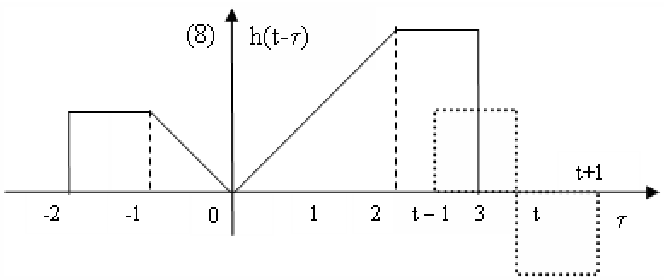
(6) $1<t<2$ si calcola l'integrale $y(t)=\int_{t-1}^{t}\tau d\tau+\int_{t}^{2}-\tau d\tau+\int_{2}^{t+1}-2d\tau=...=\frac{t^2}{2}-t-\frac{1}{2}$



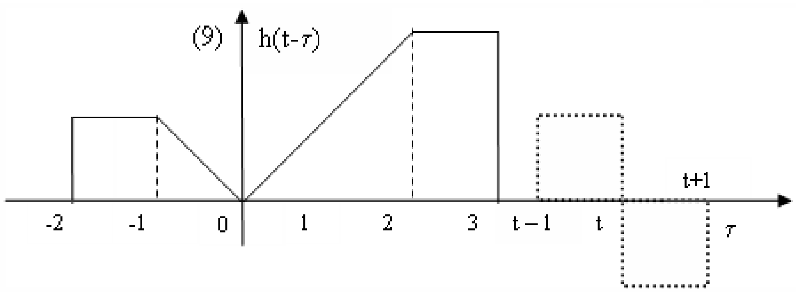
(7) $2<t<3$ si calcola l'integrale $y(t)=\int_{t-1}^{2}\tau d\tau+\int_{2}^{t}2d\tau+\int_{t}^{3}-2d\tau=...=-\frac{t^2}{2}+5t-\frac{17}{2}$



(8) $2<t-1<3 \quad \rightarrow \quad 3<t<4$ si calcola l'integrale $y(t)=\int_{t-1}^{3}2d\tau=...=-2t+8$



(9) $t-1>3 \quad \rightarrow \quad t>4$ non si ha alcuna sovrapposizione dei segnali, pertanto $y(t)=0$



A questo punto dell'esercizio è bene costruire una tabella con il valore del segnale y(t) nei vari intervalli, per mezzo della quale poter poi rappresentare graficamente la convoluzione.

(1)	t < -3	$y(t)=0$
(2)	-3 < t < -2	$y(t)=-t-3$
(3)	-2 < t < -1	$y(t)=\frac{t^2}{2}+3t+3$
(4)	-1 < t < 0	$y(t)=-\frac{3t^2}{2}-2t$
(5)	0 < t < 1	$y(t)=t^2-2t$
(6)	1 < t < 2	$y(t)=\frac{t^2}{2}-t-\frac{1}{2}$
(7)	2 < t < 3	$y(t)=-\frac{t^2}{2}+5t-\frac{17}{2}$
(8)	3 < t < 4	$y(t)=-2t+8$
(9)	t > 4	$y(t)=0$

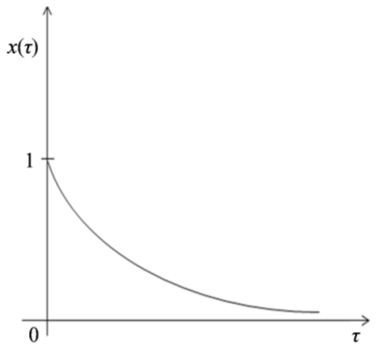
ESERCIZIO 2

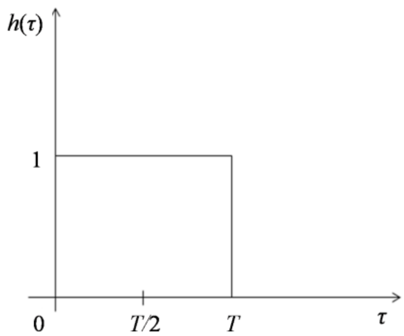
Siano

$$\begin{cases} x(t) = e^{-\alpha t}\mu_{-1}(t) \quad (\alpha > 0) \\ h(t) = rect_T\left(t - \frac{T}{2}\right) \end{cases}$$

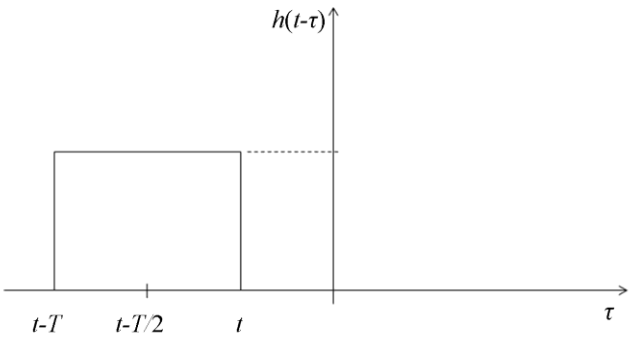
Calcolare: $x(t) * h(t) = y(t)$

SVOLGIMENTO:



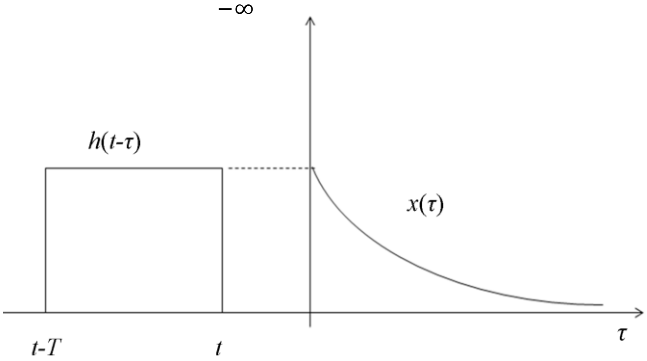


Da cui



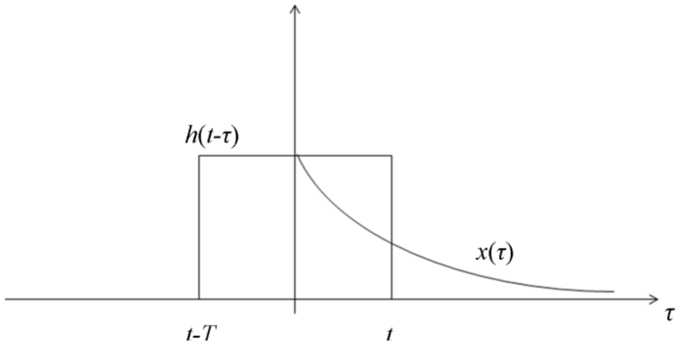
1) $t \leq 0$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau) d\tau = 0$$



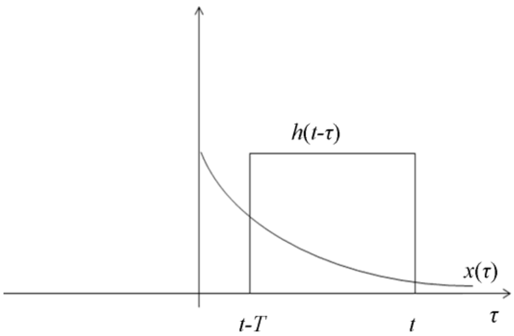
2) $0 \le t \le T$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau}\ \cdot 1\ d\tau = \left[-\frac{1}{\alpha}\ e^{-\alpha\tau}\right]_{0}^{t} = \frac{1}{\alpha}\left[1 - e^{-\alpha t}\right]$$

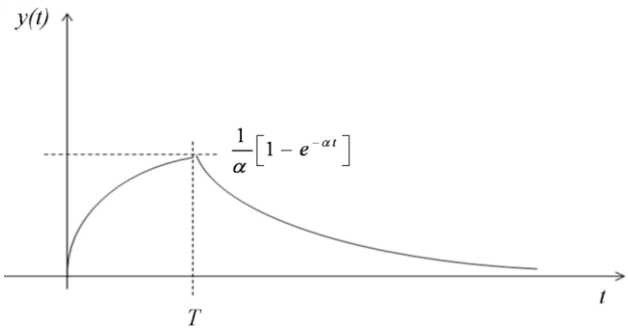


3) $t \ge T$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)d\tau = \int_{t-T}^{t} e^{-\alpha\tau}\ \cdot\ 1\ d\tau = \left[-\frac{1}{\alpha}\ e^{-\alpha\tau}\right]_{t-T}^{t} = \frac{1}{\alpha}\left[e^{-\alpha(t-T)} - e^{-\alpha t}\right]$$



Si ottiene:



ESERCIZIO 3

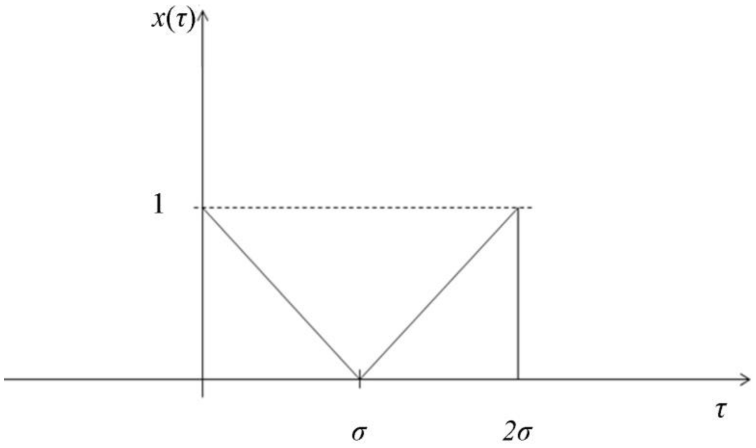
Sia

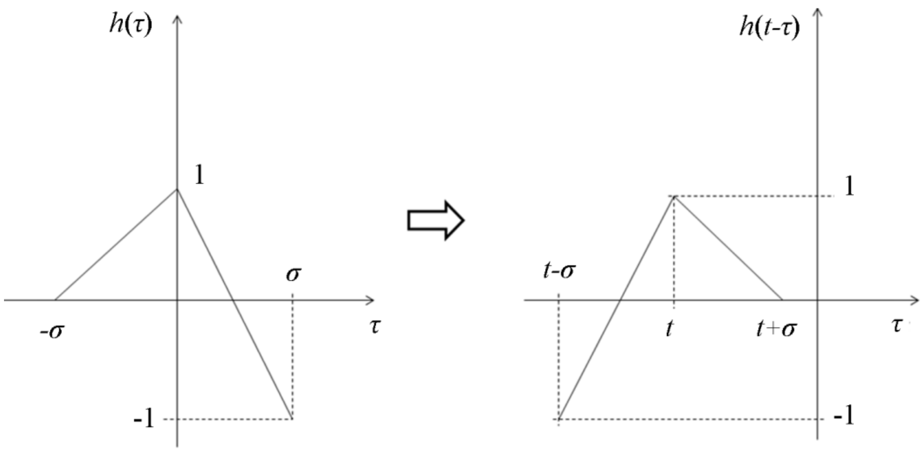
$$x(t) = \begin{cases} -\frac{t}{\sigma} + 1\,; & 0 < t \leq \sigma \\ \frac{t}{\sigma} - 1\,; & \sigma < t \leq 2\sigma \\ 0 \quad ; & altrove \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} -\frac{2}{\sigma} t + 1\,; & 0 < t \leq \sigma \\ \frac{t}{\sigma} + 1\,; & -\sigma < t \leq 0 \\ 0 \quad ; & altrove \end{cases}$$

Si calcoli:

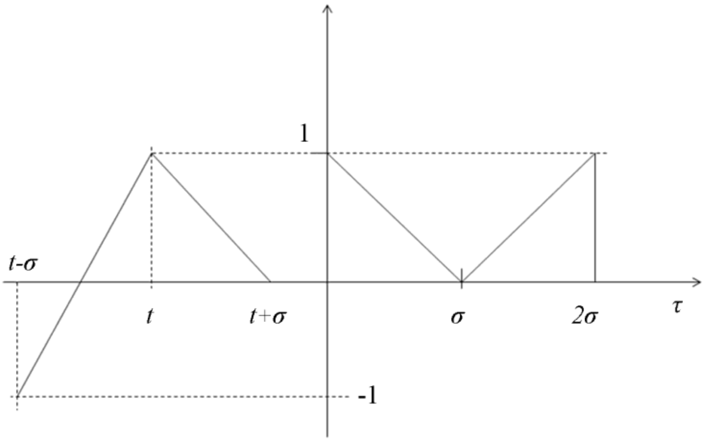
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau) d\tau$$

SVOLGIMENTO:



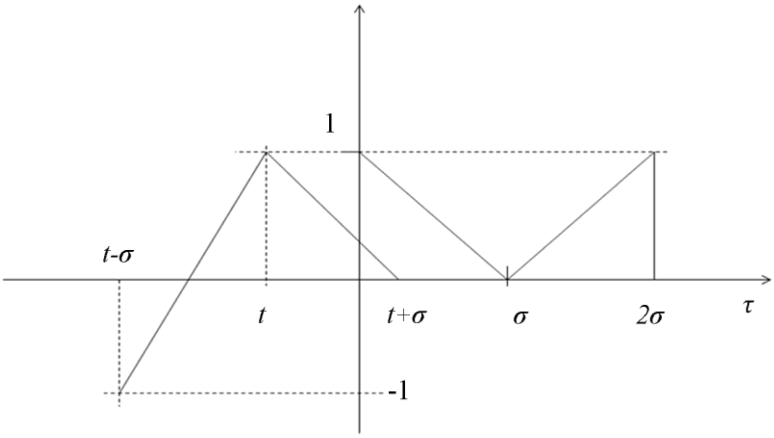


1) $t+\sigma \leq 0 \rightarrow t \leq -\sigma$



$y(t)=0$

2) $0 \leq t+\sigma \leq \sigma \rightarrow \; -\sigma \leq t \leq 0$



$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\; h(t-\tau) d\tau=\int_{0}^{t+\sigma}\left(-\frac{\tau}{\sigma}+1\right)\left[\frac{1}{\sigma}(t-\tau)+1\right] d\tau=$$

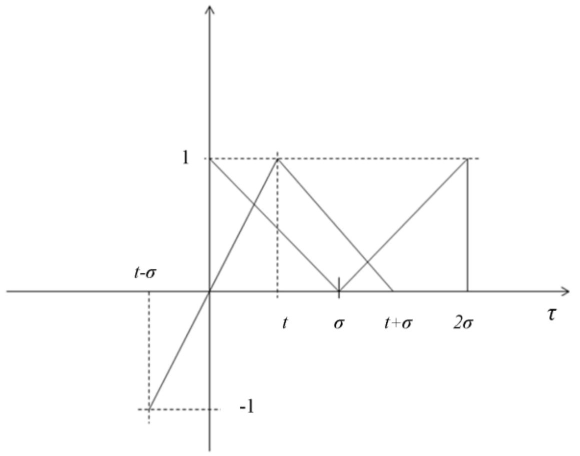
$$=\int_{0}^{t+\sigma}-\frac{t-\tau}{\sigma} \cdot \frac{\tau}{\sigma}-\frac{\tau}{\sigma}+\frac{t-\tau}{\sigma}+1\, d\tau=$$

$$=\int_{0}^{t+\sigma}-\frac{t \cdot \tau}{\sigma^2}+\frac{\tau^2}{\sigma^2}-2 \frac{\tau}{\sigma}+\frac{\tau}{\sigma}+1\, d\tau=\left[-\frac{t}{2\sigma^2}\tau^2+\frac{\tau^3}{3\sigma^2}-\frac{\tau^2}{\sigma}+\frac{t \cdot \tau}{\sigma}+\tau\right]_0^{t+\sigma}=$$

$$=\frac{t}{2\sigma^2}\left(t^2+\sigma^2+2t\sigma\right)+\frac{(t+\tau)\left(t^2+\sigma^2+2t\sigma\right)}{3\sigma^2}-\frac{t^2+\sigma^2+2t\sigma}{\sigma}+\frac{t^2+t\sigma}{\sigma}+t+\sigma=$$

$$=\frac{-3t^2-3t\sigma^2-6t^2\sigma+2t^3+2t\sigma^2+4t^2\sigma+2t^2\sigma+2\sigma^3+4t\sigma^2}{6\sigma^2}=-\frac{t^3}{6\sigma^2}+\frac{t}{2}+\frac{\sigma}{3}$$

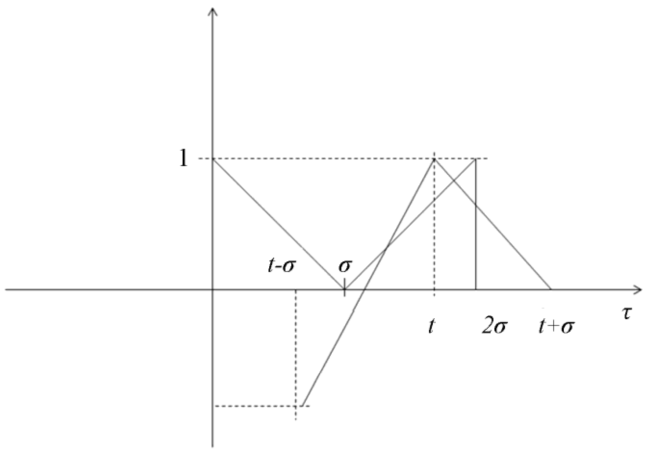
3) $\sigma \leq t + \sigma \leq 2\sigma \rightarrow\ 0 \leq t \leq \sigma$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau) d\tau = \int_{0}^{t} \left(-\frac{\tau}{\sigma} + 1\right)\left[-2\frac{t-\tau}{\sigma} + 1\right] d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{\sigma} \left(-\frac{\tau}{\sigma} + 1\right)\left[\frac{t-\tau}{\sigma} + 1\right] d\tau + \int_{\sigma}^{t+\sigma} \left(\frac{\tau}{\sigma} - 1\right)\left[\frac{t-\tau}{\sigma} + 1\right] d\tau = \frac{2t^3}{3\sigma^2} - \frac{3t^2}{2\sigma} + \frac{t}{2} + \frac{\sigma}{3}$$

4) $\sigma \leq t \leq 2t$

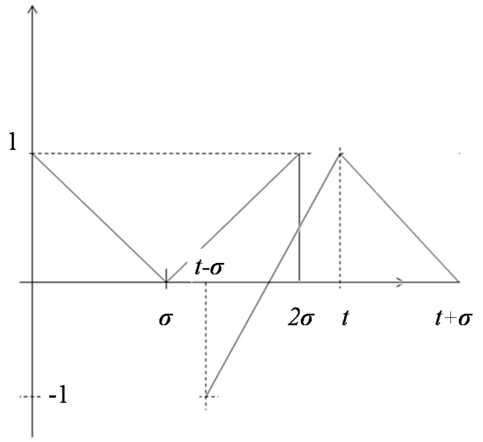


$$y(t) = \int_{t-\sigma}^{\sigma} \left(-\frac{\tau}{\sigma} + 1\right)\left[-2\frac{t-\tau}{\sigma} + 1\right] d\tau + \int_{\sigma}^{t} \left(\frac{\tau}{\sigma} - 1\right)\left[-2\frac{t-\tau}{\sigma} + 1\right] d\tau$$

$$+ \int_{t}^{2\sigma} \left(\frac{\tau}{\sigma} - 1\right)\left[\frac{t-\tau}{\sigma} + 1\right] d\tau =$$

$$= -\frac{5t^3}{6\sigma^2} + \frac{3t^2}{\sigma} - 3t + \frac{5\sigma}{6}$$

5) $\sigma \leq t-\sigma \leq 2\sigma \rightarrow\ 2\sigma \leq t \leq 3\sigma$

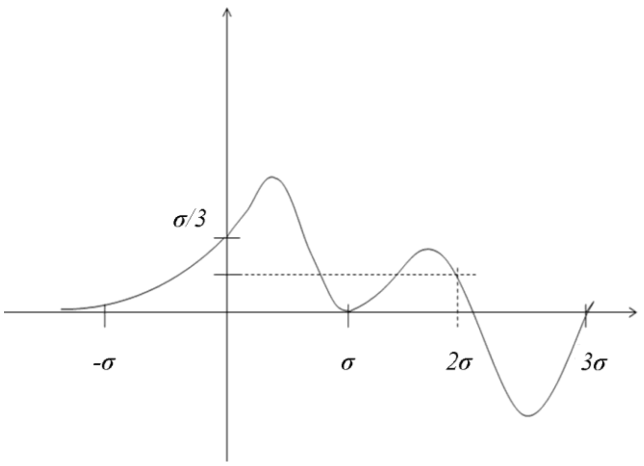


$$y(t)=\int_{t-\sigma}^{2\sigma}\left(\frac{\tau}{\sigma}-1\right)\left[-2\frac{t-\tau}{\sigma}+1\right]d\tau=\frac{t^3}{3\sigma^2}-\frac{3t^2}{2\sigma}+t+\frac{3\sigma}{2}$$

6) $t \geq 3\sigma$

$y(t)=0$

Risultato:

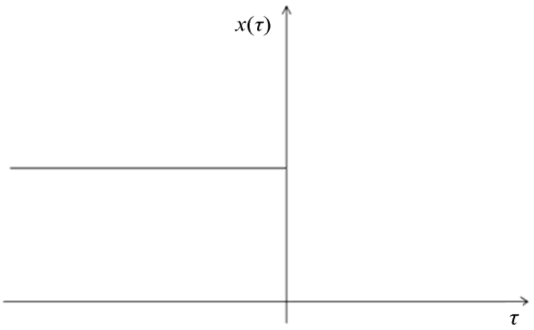


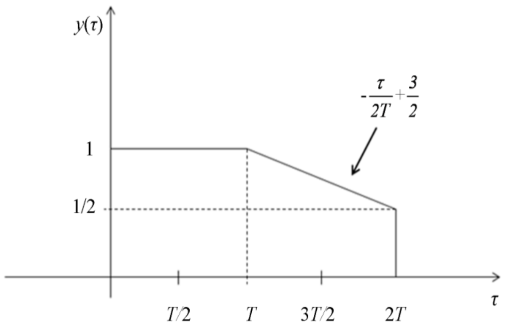
ESERCIZIO 4

Sia
$$\begin{cases} x(t) = \mu_{-1}(-t) \\ y(t) = \ rect_T\left(t - \frac{T}{2}\right) - \left(\frac{t}{2T} - \frac{3}{2}\right) \cdot rect_T\left(t - \frac{3}{2}T\right) \end{cases}$$

Si calcoli $\quad e_{xy}(t) = x(t) \circledast y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)\, y(t+\tau) d\tau$

SVOLGIMENTO:



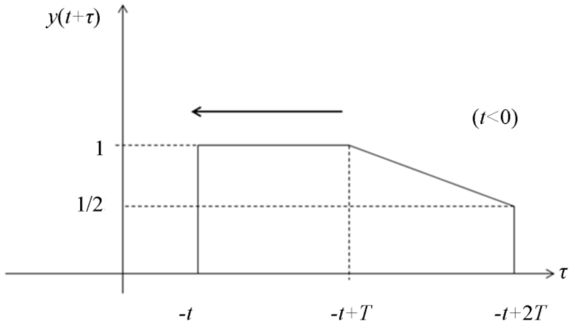


Proprietà:

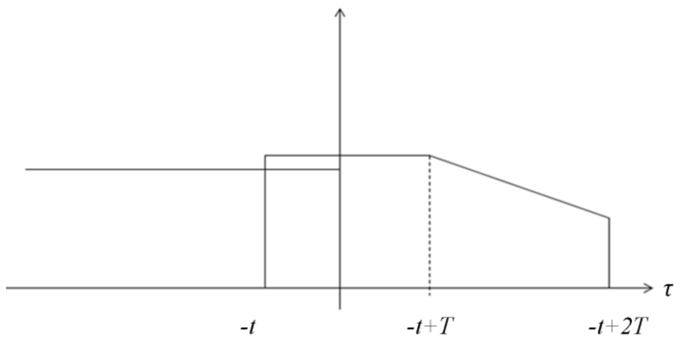
$$e_{xy}(t) = x(t) \circledast y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)\, y(t+\tau) d\tau = [t+\tau = \xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\xi - \tau)\, y(\xi) d\xi =$$
$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} y^*(\xi)\, x(\xi - t) d\,\xi\right]^* = e_{yx}^*(-t)$$

Si ha che

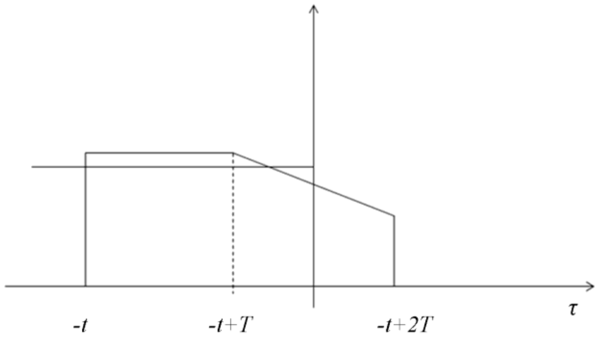
A) $-t \geq 0 \rightarrow \ \ t \leq 0 \rightarrow \ e_{xy}(t) = 0$



B) $(-t \leq 0) \cup [(-t+T) \geq 0] \rightarrow 0 \leq t \leq T \rightarrow \ e_{xy}(t) = \int_{-t}^{0} 1 \cdot 1\, d\tau = t$



C) $[(-t+T) \leq 0] \cup [(-t+2T) \geq 0] \rightarrow T \leq t \leq 2T$

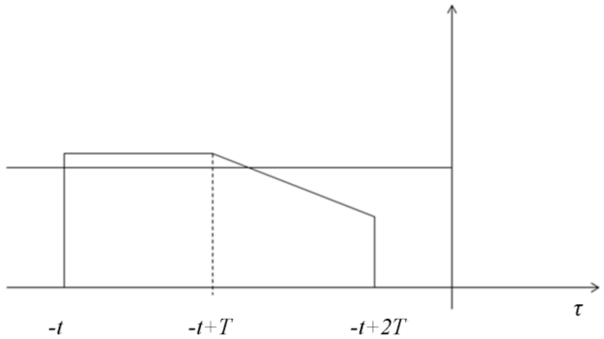


$$e_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)\, y(t+\tau) d\tau = \int_{-t}^{-t+T} d\tau + \int_{-t+T}^{0} -1 \cdot \left(\frac{t+\tau}{2T} - \frac{3}{2}\right) d\tau =$$

$$= [-t+T+t] - \left[\left(\frac{t}{2T} - \frac{3}{2}\right) \cdot \tau + \frac{\tau^2}{4T}\right]_{-t+T}^{0} = T + \left(\frac{t}{2T} - \frac{3}{2}\right)(T-t) + \frac{(T-t)^2}{4T} =$$

$$= T + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2T} - \frac{3}{2}T + \frac{3}{2}t + \frac{T}{4} + \frac{t^2}{4T} - \frac{tT}{2T} = -\frac{t^2}{4T} + \frac{3}{2}t - \frac{T}{4}$$

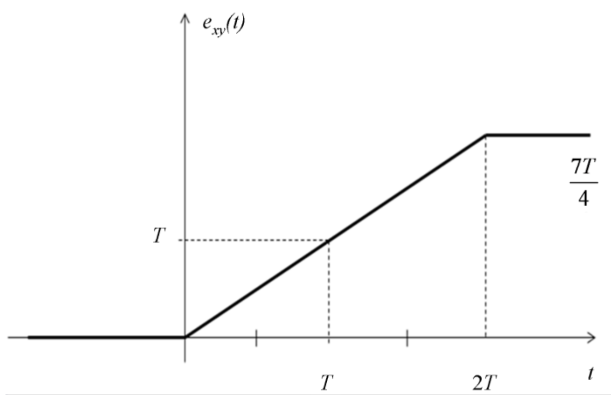
D) $-t + 2T \leq 0 \rightarrow t \geq 2T$



$$e_{xy}(t) = \int_{-t}^{-t+T} d\tau + \int_{-t+T}^{-t+2T} 1 \cdot \left[-\left(\frac{t+\tau}{2T} - \frac{3}{2}\right)\right] d\tau = [\tau]_{-t}^{-t+T} - \left[\left(\frac{t}{2T} - \frac{3}{2}\right) \cdot \tau + \frac{\tau^2}{4T}\right]_{-t+T}^{-t+2T} =$$

$$= -t + T + t - \left(\frac{t}{2T} - \frac{3}{2}\right) \cdot (-t + 2T + t - T) - \frac{1}{4T}[(-t+2T)^2 - (-t+T)^2] = \frac{7}{4}T$$

<u>NOTA</u> $e_{xy}(t) = AREA\ di\ Y(t) = T \cdot 1 + {}^{T}\!/_{2} \cdot 1 + \frac{T}{4} = \frac{7}{4}T$



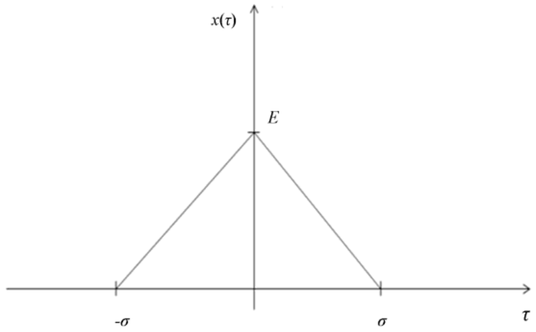
ESERCIZIO 5

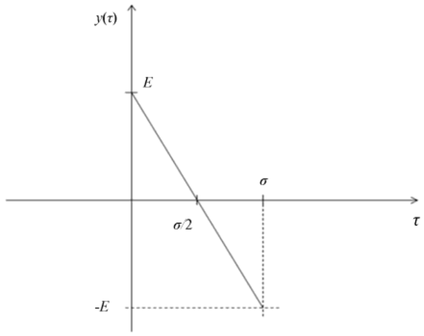
$$x(t) = \begin{cases} -\frac{E}{\sigma}t + E & ; \quad 0 \le t \le \sigma \\ \frac{E}{\sigma}t + E & ; \quad -\sigma \le t \le 0 \\ 0 & ; \quad altrove \end{cases} \qquad y(t) = \begin{cases} -2\frac{E}{\sigma}t + E & ; \quad 0 \le t \le \sigma \\ 0 & ; \quad altrove \end{cases}$$

$E \in R$

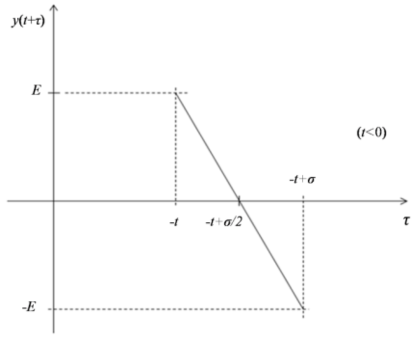
Si calcoli $\quad x(t) \circledast y(t) = e_{xy}(t)$

SVOLGIMENTO:



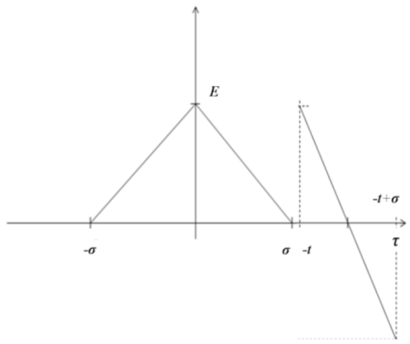


$$e_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau)\, y(t+\tau) d\tau$$

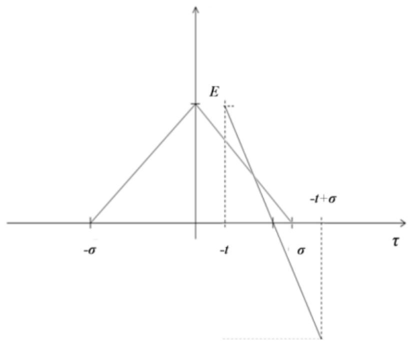


Casistiche:

1) $-t \ge \sigma \rightarrow \ t \le -\sigma \rightarrow \quad e_{xy}(t) = 0$



2) $(-t \leq \sigma) \cup (-t \geq 0) \rightarrow -\sigma \leq t \leq 0$



$$e_{xy}(t) = \int_{-t}^{\sigma}\left(-\frac{E}{\sigma}\tau + E\right)\cdot\left(-2\frac{t+\tau}{\sigma}\,E + E\right)d\tau =$$

$$= \int_{-t}^{\sigma} 2\frac{E^2}{\sigma^2}t\cdot\tau + 2\frac{E^2}{\sigma^2}\,\tau^2 - \frac{E^2}{\sigma}\tau - 2\frac{E^2}{\sigma}t - 2\frac{E^2}{\sigma}\tau + E^2 d\tau =$$

$$= \int_{-t}^{\sigma} 2\frac{E^2}{\sigma^2}\tau^2 + \frac{E^2}{\sigma}\tau\cdot\left(\frac{2t}{\sigma} - 3\right) - \frac{E^2}{\sigma}\tau + E^2 d\tau =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{E^2}{\sigma^2}\cdot[t^3]_{-t}^{\sigma} + \frac{E^2}{2\sigma}\cdot\left(\frac{2t}{\sigma} - 3\right)\cdot[t^3]_{-t}^{\sigma} + \left(E^2 - \frac{2E^2}{\sigma}t\right)\cdot(\sigma + t) =$$

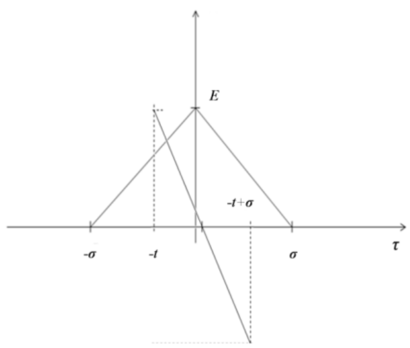
$$= \frac{2E^2}{3}\sigma + \frac{2E^2}{3\sigma^2}t^3 + \frac{2E^2 t}{2} - \frac{3E^2}{2}\sigma - \frac{2E^2 t^3}{2\sigma^2} + \frac{3E^2}{2\sigma}t^2 + E^2\sigma + E^2 t - 2E^2 t - \frac{2E^2}{\sigma}t^2 =$$

$$= -\frac{E^2}{3\sigma^2}t^3 - \frac{E^2}{2\sigma}t^2 + \frac{E^2\sigma}{6}$$

Verifica: per $t = -5 \rightarrow e_{xy}(t) = 0$;

per $t = 0 \rightarrow e_{xy}(0) = \frac{E^2\sigma}{6}$;

3) $(-t \leq 0) \cup (-t \geq -\sigma) \rightarrow 0 \leq t \leq \sigma$



$$e_{xy}(t) = \int_{-t}^{0}\left(\frac{E}{\sigma}\tau + E\right)\left(-2\frac{t+\tau}{\sigma}\,E + E\right)d\tau + \int_{0}^{-t+\sigma}\left(-\frac{E}{\sigma}\tau + E\right)\cdot\left(-2\frac{t+\tau}{\sigma}\,E + E\right)d\tau =$$

$$= E^2\left\{\int_{-t}^{0} -2\frac{t\cdot\tau}{\sigma^2} - \frac{2t^2}{\sigma^2} + \frac{t}{\sigma} - 2\frac{t}{\sigma} - 2\frac{t}{\sigma} + 1\, d\tau + \int_t^0 2\frac{t\cdot\tau}{\sigma^2} + \frac{2t^2}{\sigma^2} - \frac{t}{\sigma} - 2\frac{t}{\sigma} - 2\frac{t}{\sigma} + 1\, d\tau\right\} =$$

$$= E^2\left\{\int_{-t}^{0} -2\frac{\tau^2}{\sigma^2} + \frac{\tau}{\sigma}\cdot\left(-\frac{2t}{\sigma} - 1\right) - 2\frac{t}{\sigma} + 1\, d\tau + \int_0^{-t+\sigma} 2\frac{\tau^2}{\sigma^2} + \frac{\tau}{\sigma}\cdot\left(\frac{2t}{\sigma} - 3\right) - \frac{2t}{\sigma} + 1\, d\tau\right\} =$$

$$= E^2\left\{\frac{2-t^3}{\sigma^2\cdot 3} + \left(\frac{2t}{\sigma}+1\right)\cdot\frac{t^2}{2\sigma} + \left(1-\frac{2t}{\sigma}\right)t + 2\frac{(-t+\sigma)^3}{3\sigma^2} + \left(\frac{2t}{\sigma}-3\right)\cdot\frac{(-t+\sigma)^2}{2\sigma} + \left(1-\frac{2t}{\sigma}\right)(-t+\sigma)\right\} =$$

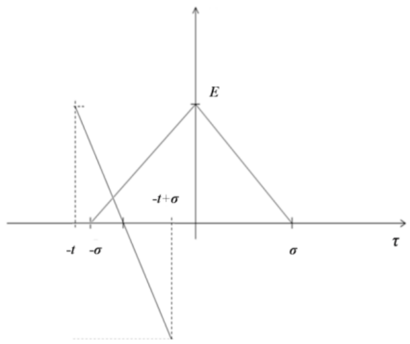
$$= E^2\left\{\frac{2}{3\sigma^2}(-\sigma^3 + 3t^2\sigma - 3t^2\sigma) + \frac{2t}{2\sigma^2}(t^2+t^2+\sigma-2+\sigma) + \frac{t^2}{2\sigma} - 3\frac{t^2+\sigma^2-2t\sigma}{2\sigma} + \left(1-\frac{2t}{\sigma}\right)(t-t+\sigma)\right\} =$$

$$= E^2\left\{\frac{2}{3\sigma^2}t^3 + t^2\left[\frac{2}{\sigma} - \frac{2}{\sigma} + \frac{1}{2\sigma} - \frac{3}{2\sigma}\right] + t\left[-2 + \frac{\sigma^2}{\sigma^2} + 3\frac{\sigma}{\sigma} - 2\right] + \left[\frac{2}{3}\sigma - \frac{3}{2}\frac{\sigma^2}{\sigma} + \sigma\right]\right\} =$$

$$= E^2\left\{\frac{2t^3}{3\sigma^2} - \frac{t^2}{\sigma} + \frac{1}{6}\sigma\right\}.$$

Verifica: $t=\sigma \rightarrow \sigma E^2\left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}\sigma E^2$

4) $(-t \le -\sigma) \cup (-t+\sigma \ge -\sigma) \rightarrow \sigma \le t \le 2\sigma$



$$e_{xy}(t) = \int_{-\sigma}^{-t+\sigma}\left(\frac{E}{\sigma}\tau + E\right)\left(-2\frac{(t+\tau)}{\sigma}E + E\right)d\tau =$$

$$= E^2\left\{-\frac{2}{3\sigma^2}[\tau^3]_{-\sigma}^{-t+\sigma} - \left(\frac{2t}{\sigma}+1\right)\frac{1}{2\sigma}[\tau^3]_{-\sigma}^{-t+\sigma} + \left(1-\frac{2t}{\sigma}\right)[\tau]_{-\sigma}^{-t+\sigma}\right\} =$$

$$= E^2\left\{-\frac{2}{3\sigma^2}(-t^3+\sigma^3+3t^2\sigma-3\sigma^2\tau+\sigma^3) - \frac{1}{2\sigma}\left(1+\frac{2t}{\sigma}\right)(t^2+\sigma^2-2t\sigma-\sigma) + \left(1-\frac{2t}{\sigma}\right)(-t+\sigma+\sigma)\right\} =$$

$$= E^2\left\{t^3\left(\frac{2}{3\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2}\right) + t^2\left(-\frac{2}{\sigma} + \frac{2}{\sigma} - \frac{1}{2\sigma} + \frac{2}{\sigma}\right) + t(2+1-1-4) - \frac{4}{3}\sigma + 2\sigma\right\} =$$

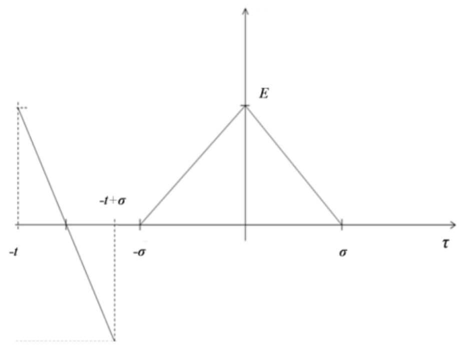
$$= E^2\left\{-\frac{1}{3\sigma^2}t^3 + \frac{3}{2\sigma}t^2 - 2t + \frac{2}{3}\sigma\right\}$$

Verifica:

$$t = \sigma \rightarrow \ \sigma E^2 \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 + \frac{2}{3} \right\} = \sigma E^2 \frac{-2+9-12+4}{6} = \ -\frac{\sigma E^2}{6}$$

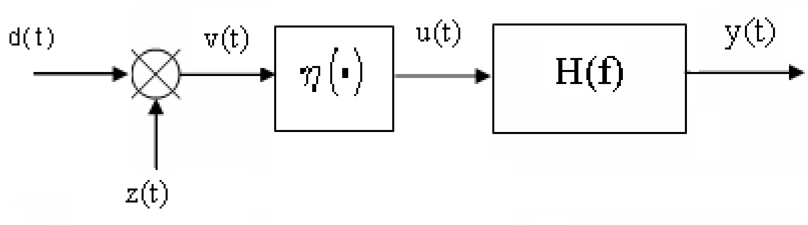
$$t = 2\sigma \rightarrow \ \sigma E^2 \left\{ -\frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{2}{3} \right\}$$

5) $-t + \sigma \leq -\sigma \rightarrow t \geq 2\sigma \rightarrow \ e_{xy}(t) = 0$



ESERCIZIO 6 (ESAME DEL 21/11/2001)

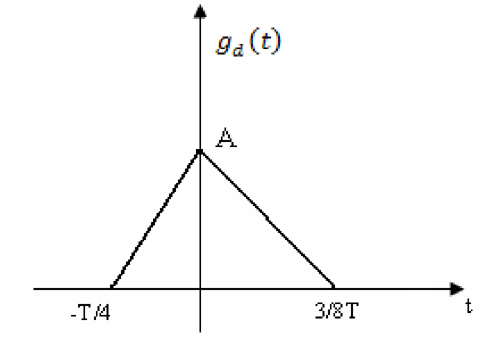
Sia d(t) un segnale periodico che transita attraverso il sistema rappresentato in Figura:



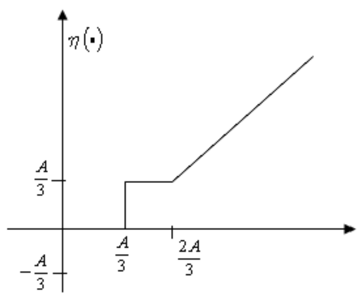
Con:

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_d(\mathrm{t} - \mathrm{nT})$$

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}_{\mathrm{T}/2}(\mathrm{t} - \mathrm{nT})$$



Inoltre, $\eta(\cdot)$ è una non linearità istantanea:

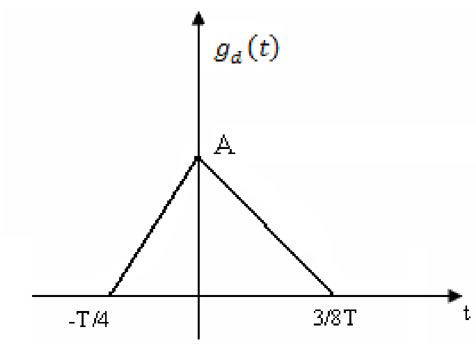


e la funzione di trasferimento del filtro è $(f) = rect_{\frac{1}{T}}(f) * rect_{\frac{1}{2T}}(f)$

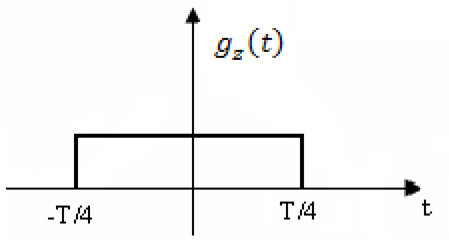
Si calcoli la potenza del segnale y(t).

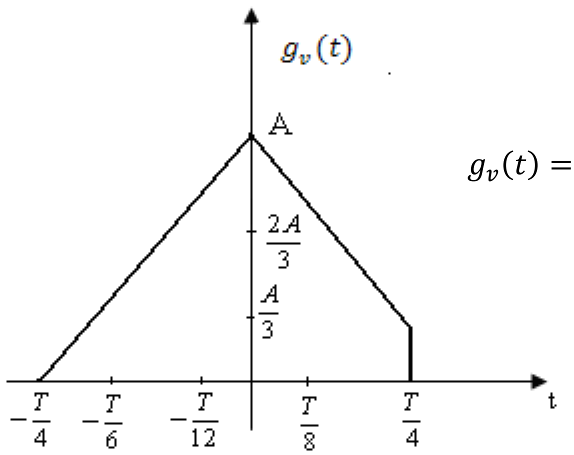
SVOLGIMENTO:

Il segnale d(t) è un segnale periodico di periodo T, avente come segnale base il segnale $g_d(t)$:



Il segnale d(t) è finestrato dal segnale periodico, il cui segnale base $g_z(t)$ è la funzione Rect compresa tra gli estremi [- $T/4$;$T/4$]. Il segnale v(t) è un segnale periodico di periodo T avente come segnale base $g_v(t)$ in figura, risultato della moltiplicazione tra il segnale $g_d(t)$e il segnale $g_z(t)$.





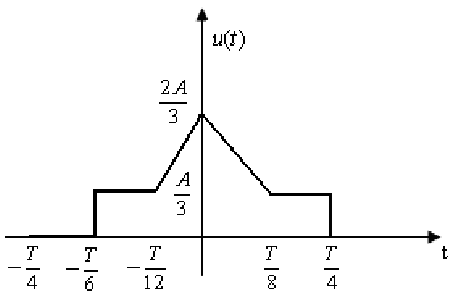
$$g_v(t) = \begin{cases} \frac{4\mathrm{A}}{\mathrm{T}}\mathrm{t} + \mathrm{A} & ; -\frac{\mathrm{T}}{4} \leq \mathrm{t} \leq 0 \\ -\frac{8\mathrm{A}}{3\mathrm{T}}\mathrm{t} + \mathrm{A} & ; 0 \leq \mathrm{t} \leq \frac{\mathrm{T}}{4} \end{cases}$$

Il segnale v(t) è posto in ingresso alla non linearità istantanea $\eta(.)$, e in uscita si ottiene il segnale periodico u(t) con periodo T ed avente come segnale base il segnale $g_v(t)$. In base all'andamento della non linearità istantanea si ottiene:

$$0 \leq v(t) \leq \frac{A}{3} \rightarrow g_u(t)$$

$$\frac{A}{3} \leq v(t) \leq \frac{2A}{3} \rightarrow g_u(t) = A/3$$

$$\frac{2A}{3} \leq v(t) < \infty \rightarrow g_u(t) = segnale\ v(t) traslato\ in\ ampiezza\ di - A/3$$



La P_y del segnale y(t) si ottiene come $P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{yy}(f)df = e_{yy}(0)$, dove

$$P_{yy}(f) = P_{uu}(f)|H(f)|^2$$

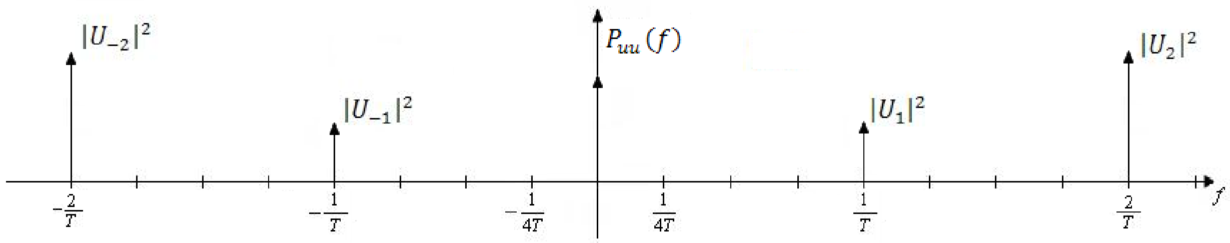
essendo il segnale u(t) un segnale periodico di periodo T il suo spettro di densità di potenza $P_{uu}(f)$ è pari a:

$$P_{uu}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |U_n|^2 u_0(f - nF)$$

dove

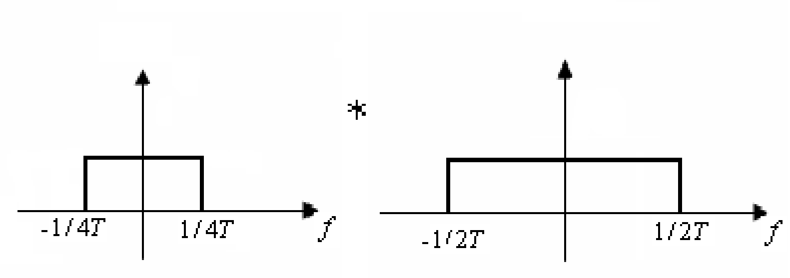
$$U_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-j2\pi nFt} dt$$

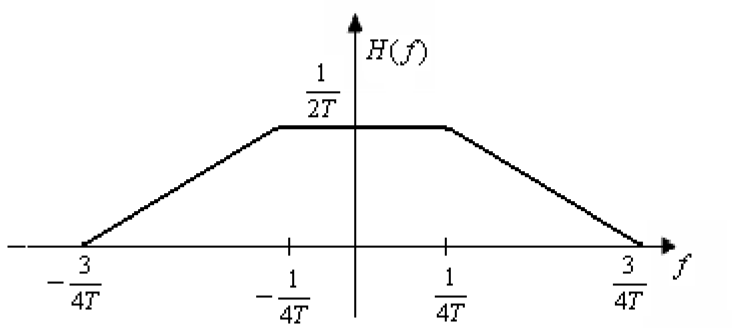
rappresentano i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del segnale u(t).



H(f) è il filtro definito a partire dalla convoluzione di due funzioni rect:

$$H(f) = rect_{\frac{1}{T}}(f) * rect_{\frac{1}{2T}}(f)$$





Ne segue che $P_{yy}(f) = |U_0|^2 |H(f)|^2{}_{|f=0}\ \ u_0(f)$ essendo l'impulso in $f = 0$ l'unico impulso di $P_{uu}(f)$ ad essere interno alla banda del filtro H(f). Si osservi che essendo:

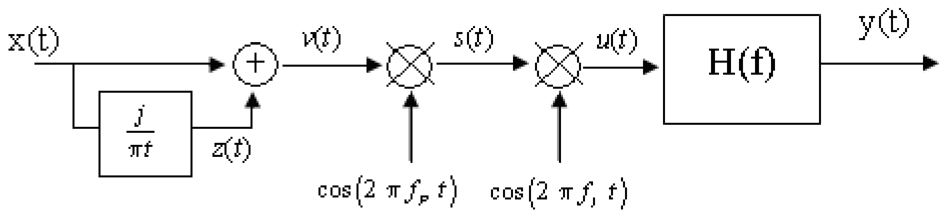
$$U_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)dt$$

il calcolo di U_0 si riduce al calcolo dell'area del segnale base del segnale periodico u(t). Ne segue che $U_0 = \frac{25}{144}A$. Quindi:

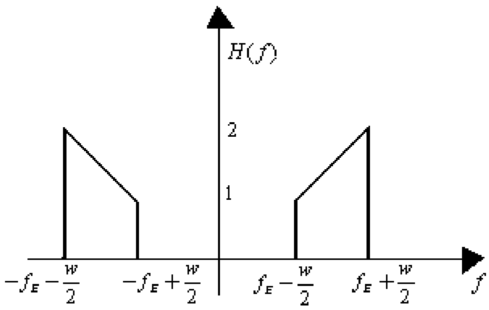
$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{yy}(f)df = |U_0|^2 |H(f)|^2{}_{|f=0} = \left(\frac{25}{144}A\right)^2 \frac{1}{4T^2}$$

ESERCIZIO 7 (ESAME DEL 21/11/2001)

Con riferimento allo schema di Figura, sia, inoltre $x(t) = Ca[2\pi wt]$ si ha $f_E = f_P - f_I > w$



La funzione di trasferimento del filtro è:

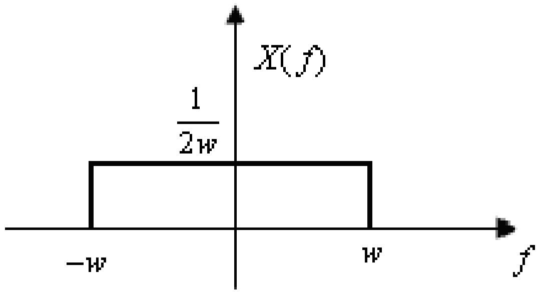


Si calcoli il segnale in uscita y(t).

SVOLGIMENTO:

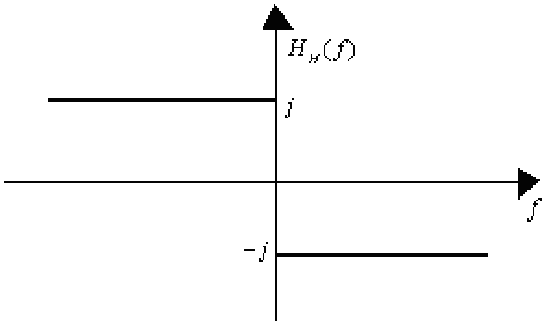
La trasformata di Fourier del segnale x(t) è:

$$X(f) = \frac{1}{2w} rect_{2w}(f)$$

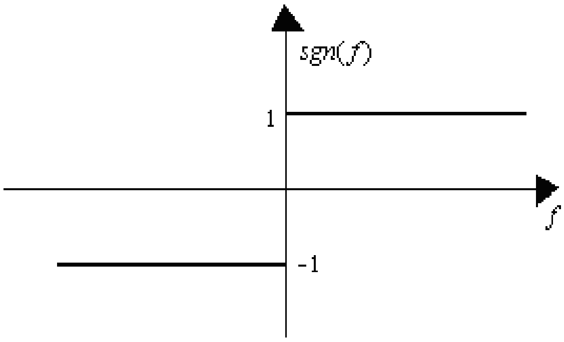


Si osservi che la funzione di trasferimento del filtro ha risposta impulsiva $\frac{j}{\pi T}$ è data da j$H_h(f)$ ove $H_h(f)$è la funzione di trasferimento del filtro di Hilbert

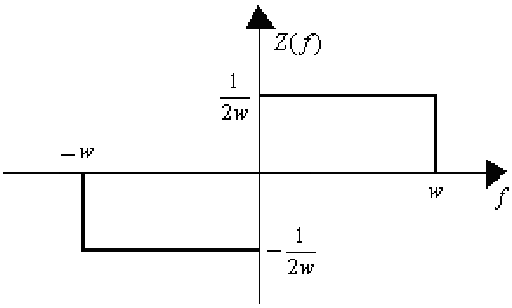
$$H_H(f) \begin{Bmatrix} j & per\ f < 0 \\ 0 & per\ f = 0 \\ -j & per\ f > 0 \end{Bmatrix}$$



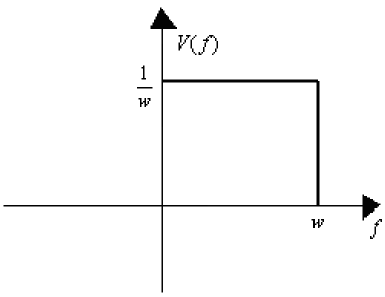
Quindi $\mathcal{F}\left\{\frac{j}{\pi t}\right\} = sgn(f)$



Il segnale in uscita dal filtro è $Z(f) = X(f)sgn(f) = -\frac{1}{2w}rect_w\left(f + \frac{w}{2}\right) + \frac{1}{2w}rect_w\left(f - \frac{w}{2}\right)$



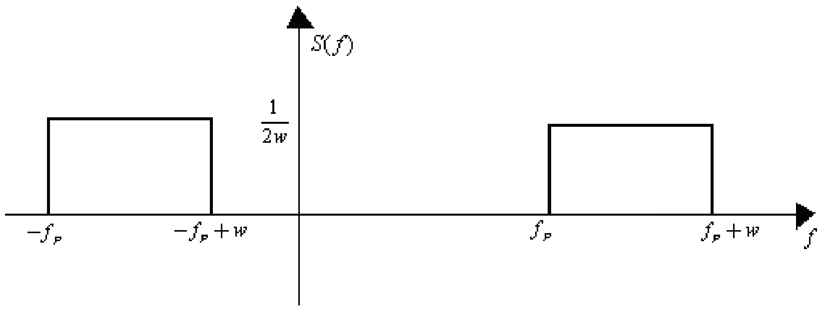
Il segnale Z(f) è sommato al segnale X(f), ottenendo così il segnale $V(f) = \frac{1}{w}Rect_w\left(f - \frac{w}{2}\right)$



Il segnale v(t) è ora moltiplicato per il segnale $\cos(2p\, f_P\, t)$, subendo quindi una modulazione alla frequenza f_P. In frequenza $S(f) = V(f) * \mathcal{F}\{cos2\pi f_p\ \text{t}\}$

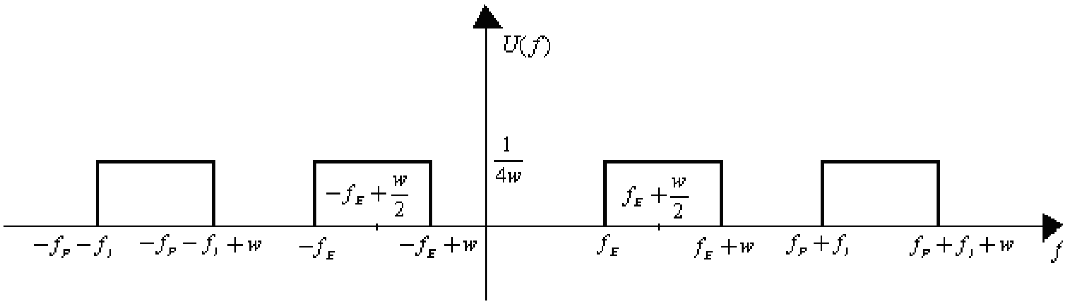
$$S(f) = V(f) * \left\{\frac{1}{2}(u_0(f - f_P) + u_0(f + f_P)\ )\right\} =$$

$$= \frac{1}{2w} rect_w\left(f - \frac{w}{2} - f_P\right) + \frac{1}{2w} rect_w(f - \frac{w}{2} + f_P)$$



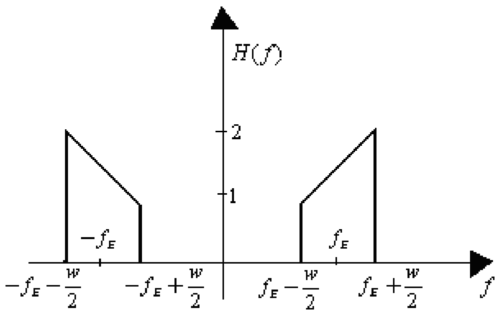
$$U(f) = S(f) *\ \mathcal{F}\{cos2\pi f_I t\} = \frac{1}{2}S(f - f_I) + \frac{1}{2}S(f + f_I)$$

Ricordando la condizione iniziale $f_E = f_P - f_I > w$, rappresentiamo graficamente la funzione U(f):

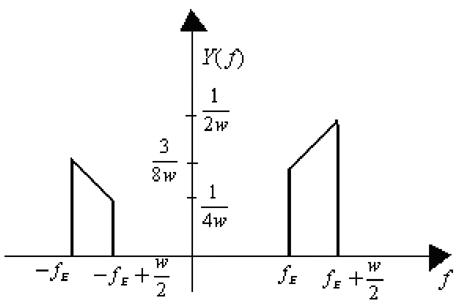


$Y(f) = H(f) \cdot U(f)$

T()

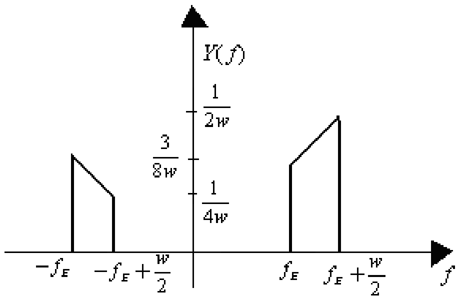


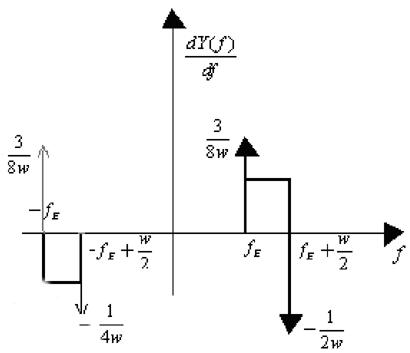
Per il calcolo dell'antitrasformata di Y(f) si ricorre al teorema della derivata



I coefficienti angolari delle due rette che caratterizzano la funzione Y(f), sono: $m_1 = \frac{1}{4w^2}$ e $m_2 = -\frac{1}{4w^2}$, da cui $y(t) = \frac{j}{2\pi t}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{dY(f)}{df}\right\}$

$$\frac{dY(f)}{df} = -\frac{1}{4w^2} rect_{\frac{w}{2}}\left[f - \left(-f_e + \frac{w}{4}\right)\right] + \frac{1}{4w^2} rect_{\frac{w}{2}}\left[f - \left(f_e + \frac{w}{4}\right)\right] + \frac{3}{8w} u_0(f - f_e) + \frac{3}{8w} u_0(f + f_e) - \frac{1}{4w} u_0\left[f - \left(-f_e + \frac{w}{2}\right)\right] - \frac{1}{2w} u_0\left[f - \left(f_e + \frac{w}{2}\right)\right]$$





A questo punto calcoliamo l'antitrasformata di Fourier della $\frac{dY(f)}{df}$:

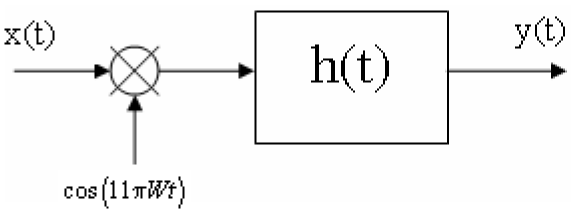
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{dY(f)}{df}\right\} = -\frac{1}{8w} Ca\left(\pi\frac{w}{2}t\right) e^{+j2t\pi\left(-f_e + \frac{w}{4}\right)} + \frac{1}{8w} Ca\left(\pi\frac{w}{2}t\right) e^{+j2t\pi\left(f_e + \frac{w}{4}\right)} + \frac{3}{8w} e^{+j2\pi f_E t} + \frac{3}{8w} e^{-j2\pi f_E t} - \frac{1}{4w} e^{+j2\pi\left(-f_e + \frac{w}{2}\right)t} - \frac{1}{2w} e^{j2\pi\left(f_e + \frac{w}{2}\right)t}$$

In conclusione, il segnale in uscita dallo schema a blocchi risulta essere:

$$y(t) = \frac{j}{2\pi t}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{dY(f)}{df}\right\}$$

ESERCIZIO 8 (ESAME DEL 30/11/2000)

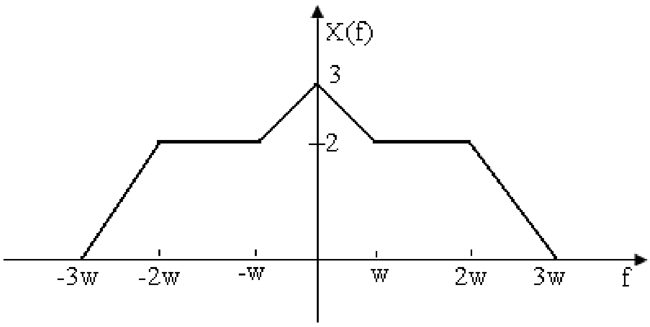
Si consideri il sistema in Figura:



dove

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$$

$$h(t) = 12WCa[2\pi 3Wt]\cos(11\,\pi Wt)$$



Si calcolino le componenti analogiche di bassa frequenza di y(t) rispetto a $f_0 = \frac{5}{2}W$.

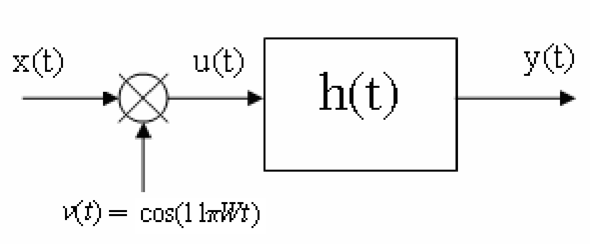
SVOLGIMENTO:

Si osservi che il segnale $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$ è reale e pari essendo X(f) un segnale reale e pari.

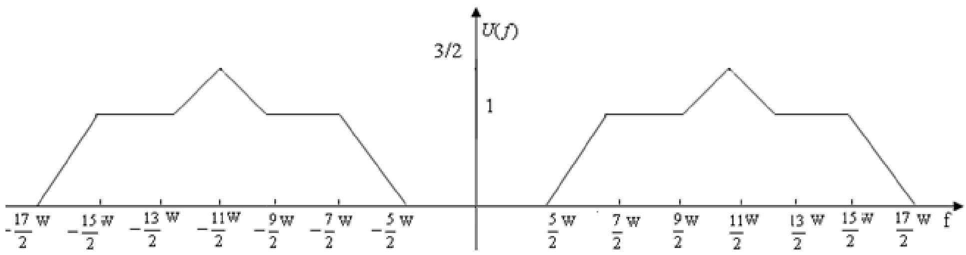
$$v(t) = \cos(11\pi Wt) = \frac{e^{j11\pi Wt} + e^{-j11\pi Wt}}{2}$$

$$V(f) = \frac{1}{2}[u_0\left(f - \frac{11}{2}W\right) + u_0\left(f + \frac{11}{2}W\right)]$$

$$u(t) = x(t)\cdot v(t) \rightarrow U(f) = X(f) * V(f)$$



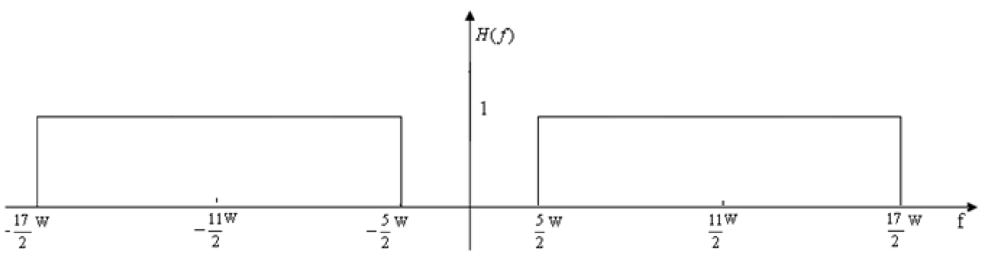
Ricordando che convolvere segnale con un impulso con un segnale equivale a traslare il segnale dove è centrato l'impulso, si ottiene:



$$h(t) = 12WCa[2\pi 3Wt]\cos(11\pi Wt)$$

$$H(f) = 12W\left[\frac{1}{6W}rect_{6w}(f)\right] * \frac{1}{2}\left[u_0\left(f - \frac{11}{2}W\right) + u_0\left(f + \frac{11}{2}W\right)\right]$$

$$H(f) = rect_{6w}\left(f - \frac{11}{2}W\right) + rect_{6w}\left(f + \frac{11}{2}W\right)$$



Analizzando il passaggio per il filtro con funzione di trasferimento H(f) sopra riportata

$$Y(f) = H(f) \times U(f)$$

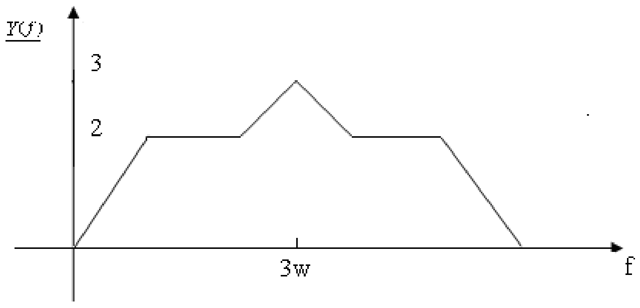
è immediato verificare che il segnale Y(f) = U(f)

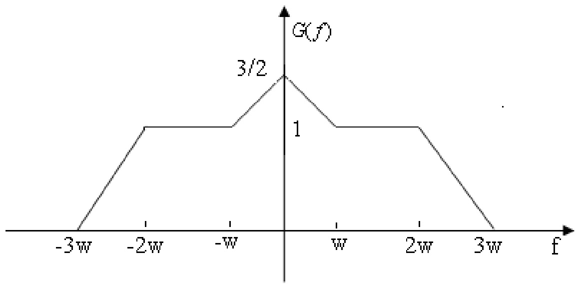
Le componenti analogiche di bassa frequenza di y(t), si ottengono come segue:

$$y_c(t) = Re\left\{\underline{\mathrm{y(t)}}\right\}$$
$$y_s(t) = Im\left\{\underline{\mathrm{y(t)}}\right\}$$

Essendo $\underline{y(t)} = 2y^{+}(t)e^{-j2\pi f_0 t}$ l'inviluppo complesso di y(t) e $y^{+}(t)$ il segnale analitico associato al segnale y(t).
Effettuando l'analisi nel dominio della frequenza

$$\underline{Y(f)} = 2Y^{+}(f+f_0)\ con \quad f_0 = \frac{5}{2}w$$



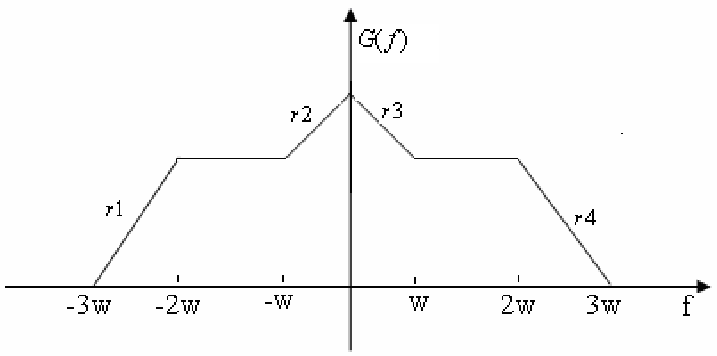


$\underline{Y(f)}$ = G(f-3w)

L'antitrasformata di G(f) si ottiene applicando la proprietà della derivazione

$$G(f) \rightarrow g(t)$$

$$Z(f) = \frac{dG(f)}{df} \rightarrow (-j2\pi t)g(t) = z(t) \Rightarrow g(t) = -\frac{1}{j2\pi t}z(t)$$



$$r1 = \frac{2}{w}(1+3w)$$

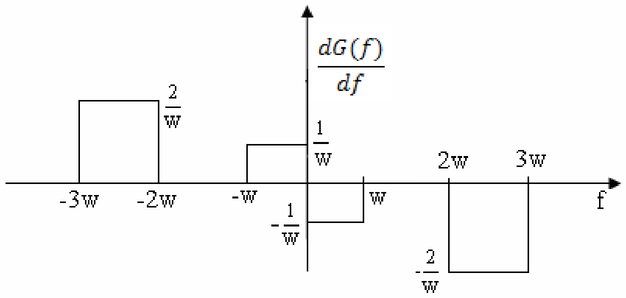
$$r2 = \frac{1}{w}(1+3w)$$

$$r3 = -\frac{1}{w}(1+3w)$$

$$r4 = -\frac{2}{w}(1+3w)$$

Coefficienti angolari dei segmenti di retta in figura

$$\frac{dG(f)}{df} = \frac{2}{w} rect_{\mathrm{w}}\left(\mathrm{f} + \frac{5}{2}\mathrm{w}\right) + \frac{1}{w} rect_{\mathrm{w}}\left(\mathrm{f} + \frac{\mathrm{w}}{2}\right) - \frac{1}{w} rect_{\mathrm{w}}\left(\mathrm{f} - \frac{\mathrm{w}}{2}\right) - \frac{2}{w} rect_{\mathrm{w}}\left(\mathrm{f} - \frac{5}{2}\mathrm{w}\right)$$



$$z(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{dG(f)}{df}\right\} = 2Ca[w\pi t]e^{-j5\pi Wt} + Ca[w\pi t]e^{-j\pi Wt} - Ca[w\pi t]e^{j\pi Wt} - 2Ca[w\pi t]e^{j5\pi Wt}$$

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{dG(f)}{df}\right\} = 2Ca[w\pi t]\left(e^{-j5\pi wt} - e^{j5\pi wt}\right) + Ca[w\pi t]\left(e^{-j\pi wt} - e^{j\pi wt}\right)$$

$$z(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{dG(f)}{df}\right\} = -4jCa[w\pi t]\sin(5\pi wt) + 2jCa[w\pi t]\sin(\pi wt)$$

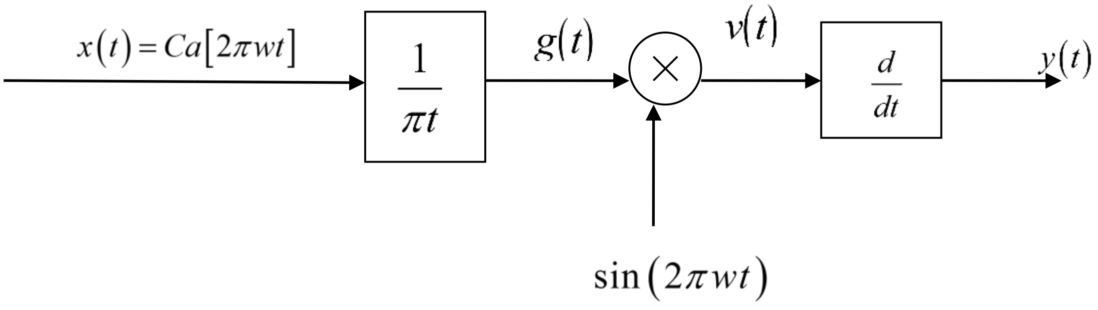
$$\begin{aligned} g(t) &= -\frac{z(t)}{j2\pi t} = 2Ca[w\pi t]\frac{sin(5\pi wt)}{\pi t} + \frac{sin(\pi wt)}{\pi t}Ca[w\pi t] = \\ &= 10wCa[w\pi t]Ca[5w\pi t] + wCa^2[w\pi t] \end{aligned}$$

$$\underline{y(t)} = y_c(t) + jy_s(t) = g(t)e^{+j2\pi 3wt} = g(t)cos(3w2\pi t) + jg(t)sen(3w2\pi t)$$

$$\begin{cases} y_c(t) = g(t)cos(3w2\pi t) \\ y_s(t) = g(t)sen(3w2\pi t) \end{cases}$$

ESERCIZIO 9 (ESAME DEL 13/09/2002)

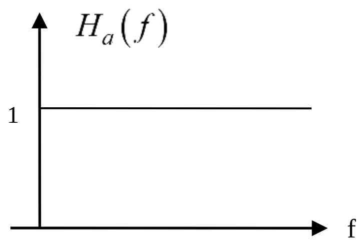
Con riferimento allo schema di figura



Si determini la trasformata di Fourier del segnale analitico $y^{+}(t)$ associato a $y(t)$.

SVOLGIMENTO:

$Y^{+}(f) = Y(f)H_a(f)$

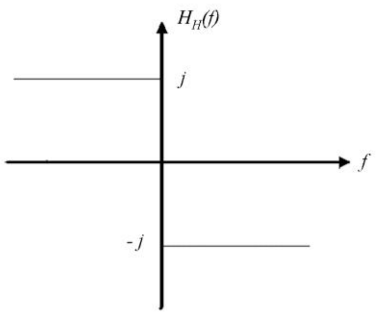


Inoltre

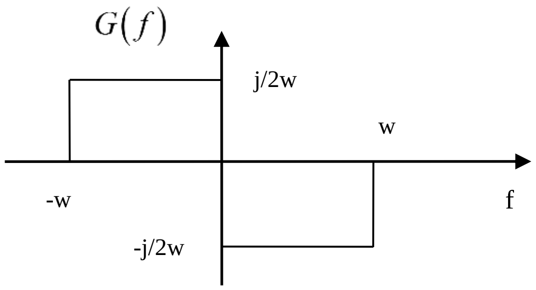
$$Y(f) = j2\pi f V(f)$$

Si ha poi

$$X(f) = \frac{1}{2w} rect_w(f)$$

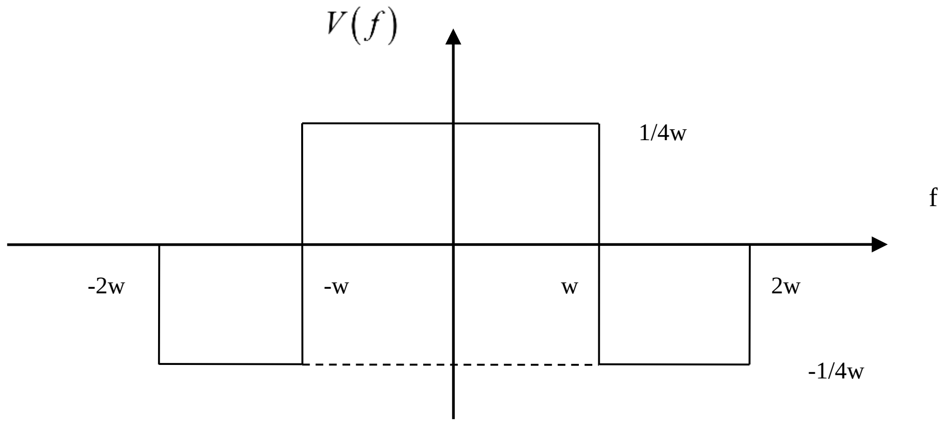


$G(f) = X(f)H_H(f)$



$$G(f) = \frac{j}{2w}\left[rect_w\left(f+\frac{w}{2}\right) - rect_w\left(f-\frac{w}{2}\right)\right]$$

$$V(f) = G(f) * \frac{\mu_0(f-w) - \mu_0(f+w)}{2j} =$$
$$= \frac{1}{4w}[rect_w\left(f+\frac{w}{2}\right) - rect_w\left(f-\frac{w}{2}\right)] * [\mu_0(f-w) - \mu_0(f+w)]$$

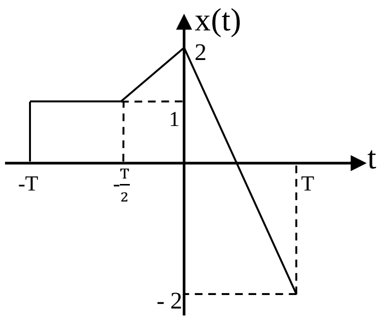


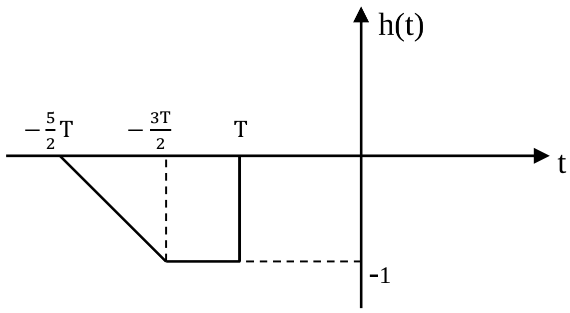
Per cui

$$Y^{+}(f) = j2\pi f\,\frac{1}{4w}\left[rect_w\left(f-\frac{w}{2}\right) - rect_w\left(f-\frac{3w}{2}\right)\right]$$

ESERCIZIO 10

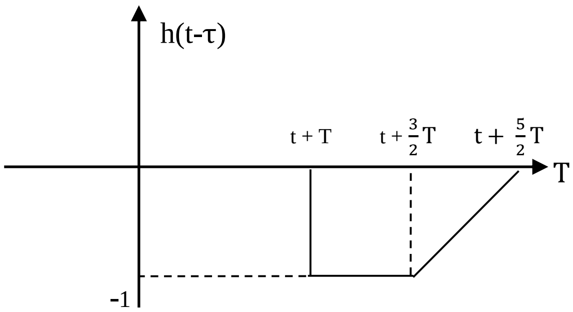
Dati due segnali x(t) ed h(t)





Si calcoli la convoluzione x(t) * h(t) nel dominio del tempo

SVOLGIMENTO



Sia y(t) = x(t) * h(t)

1) $t+\frac{5}{2}T < -T \rightarrow t < -\frac{7}{2}T \rightarrow y(t) = 0$

2) $t+\frac{5}{2}T > -T \ \text{U}\ t+\frac{5}{2}T < -\frac{T}{2} \rightarrow -\frac{7}{2}T \le t \le -3T$

$y(t) = -\frac{1}{2}\left(t+\frac{5}{2}T+T\right)\left(T\,\frac{1}{2T}\right)$ (area del triangolo di base $\left(t+\frac{5}{2}T\right)-(-T)$ e altezza $T\,\frac{1}{2T}$)

$y(t) = -\frac{1}{4}t - \frac{7}{8}T$

3)

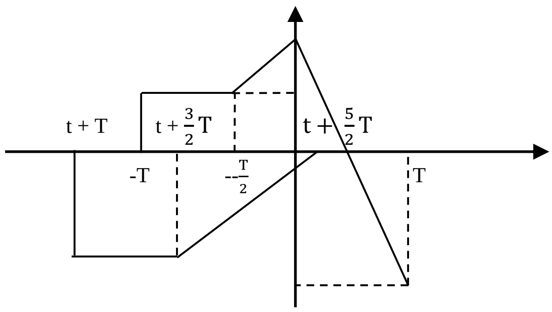
$$-3T \le t \le -\frac{5}{2}T \rightarrow y(t) = \int_{-T}^{-\frac{T}{2}} \frac{1}{T}[\tau-(t+\frac{5}{2}T)]\,d\tau + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{5}{2}T}\left(\frac{2}{T}\tau+2\right)\frac{1}{T}\left[\tau-\left(t+\frac{5}{2}T\right)\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2T}\left[\tau-\left(t+\frac{5}{2}T\right)\right]^2 \Big|_{\tau=-T}^{-\frac{T}{2}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{5}{2}T} \frac{2}{T^2}\tau^2 + \left[\frac{2}{T}-\frac{2}{T^2}\left(t+\frac{5}{2}T\right)\right]\tau - \frac{2}{T}(t+\frac{5}{2}T)d\tau$$

$$y(t) = -\frac{1}{8}(4t+13T) - \frac{t^3}{3T} - \frac{7t^2}{2T} - 12t - \frac{27T}{2} = -\frac{t^3}{3T^2} - \frac{7t^2}{2T} - \frac{25t}{2} - \frac{121T}{8}$$

4)

$-\frac{5}{2}T \le t \le -2T$



$$y(t) = -\left(t+\frac{3}{2}T-(-T)\right) + \int_{t+\frac{3}{2}T}^{-\frac{T}{2}}\frac{1}{T}[\tau-\left(t+\frac{5}{2}T\right)d\tau +$$

$$+\int_{-\frac{T}{2}}^{0}\left(\frac{2}{T}\tau+2\right)\frac{1}{T}\left[\tau-\left(t+\frac{5}{2}T\right)\right] +$$

$$+\int_{0}^{t+\frac{5}{2}T}\left(-\frac{4}{T}\tau+2\right)\frac{1}{T}\left[\tau-\left(t+\frac{5}{2}T\right)\right]d\tau =$$

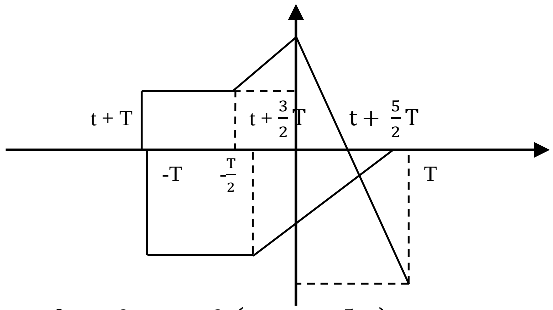
$$= -t - \frac{5}{2}T + \left[\frac{1}{2T}\left(\tau - t - \frac{5}{2}T\right)\right]_{\tau=t+\frac{3}{2}T}^{-\frac{T}{2}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{0} \frac{2}{T^2}\tau^2 + \left[\frac{2}{T} - \frac{2}{T}\left(t+\frac{5}{2}T\right)\right]\tau - \frac{2}{T}\left(t+\frac{5}{2}T\right) d\tau +$$

$$+ \int_0^{t+\frac{5}{2}T} -\frac{4}{T^2}\tau^2 + \frac{1}{T}\left[2 + \frac{4}{T}\left(t+\frac{5}{2}T\right)\right]\tau - \frac{2}{T}\left(t+\frac{5}{2}T\right) d\tau$$

$$= \left(-t - \frac{5}{2}T\right) + \left(\frac{t^2}{2T} + 3t + 4T\right) + \left(-\frac{3t}{4} - \frac{49T}{24}\right) + \frac{(t+T)(2t+5T)^2}{6T^2} = \frac{2t^3}{3T^2} + \frac{9t^2}{2T} + \frac{35t}{4} + \frac{29T}{8}$$

5)

$-2T \le t \le -\frac{3}{2}T$



$$y(t) = -\left(-\frac{T}{2} - t - T\right) - \int_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{3}{2}T} \frac{2}{T}\tau + 2\, d\tau +$$

$$+ \int_{t+\frac{3}{2}T}^{0} \frac{1}{T}\left[\tau - \left(t+\frac{5}{2}T\right)\right]\left(\frac{2}{T}\tau + 2\right) d\tau +$$

$$+\int_0^{t+\frac{5}{2}T} \left(-\frac{4}{T}\tau + 2\right)\frac{1}{T}\left[\tau - \left(t+\frac{5}{2}T\right)\right] d\tau = t + \frac{3T}{2} - \left[\frac{\tau^2}{T} + 2\tau\right]_{-\frac{T}{2}}^{t+\frac{3}{2}T} + \int_{t+\frac{3}{2}T}^{0} \frac{2}{T^2}\tau^2 + \frac{2}{T}\left(1 - t - \frac{5}{2}T\right)\tau -$$

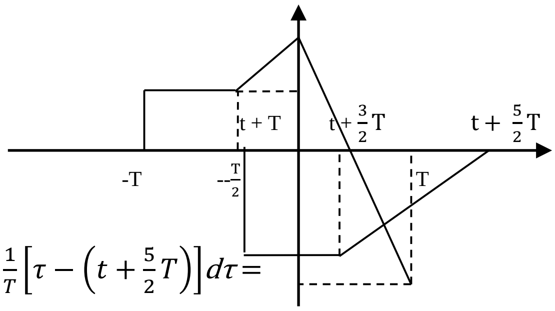
$$\frac{2}{T}\left(t+\frac{5}{2}T\right) d\tau + + \int_0^{t+\frac{5}{2}T} -\frac{4}{T^2}\tau^2 + \frac{2}{T}\left[1 + \frac{2}{T}\left(t+\frac{5}{2}T\right)\right]\tau - \frac{2}{T}\left(t+\frac{5}{2}T\right) d\tau =$$

$$y(t) = \frac{3T}{2} + t - \frac{t^2}{T} - 5t - 6T + \int_{t+\frac{3}{2}T}^{0} \frac{2}{T^2}\tau^2 + \frac{2}{T}\left(1 - t - \frac{5}{2}T\right)\tau - \frac{2}{T}\left(t+\frac{5}{2}T\right) d\tau + + \int_0^{t+\frac{5}{2}T} -\frac{4}{T^2}\tau^2 +$$

$$\frac{2}{T}\left[1 + \frac{2}{T}\left(t+\frac{5}{2}T\right)\right]\tau - \frac{2}{T}\left(t+\frac{5}{2}T\right) d\tau = \frac{t^3}{T^2} + \frac{13t^2}{2T} + \frac{55t}{4} + \frac{199T}{24}$$

6)

$-\frac{3}{2}T \le t \le -T$



$$y(t) = -\int_{t+T}^{0} \frac{2}{T}\tau + 2\, d\tau - \int_0^{t+\frac{3}{2}T} -\frac{4}{T}\tau + 2\, d\tau + \int_{t+\frac{3}{2}T}^{T} \left(-\frac{4}{T}\tau + 2\right) \frac{1}{T}\left[\tau - \left(t+\frac{5}{2}T\right)\right] d\tau =$$

$$y(t) = \left(\frac{t^2}{T} + 4t + 3T\right) + \left(\frac{2t^2}{T} + 4t + \frac{3t}{2}\right) - \frac{2t^3}{3T^2} - \frac{4t^2}{T} - \frac{11t}{2} - \frac{11T}{6} = -\frac{2t^3}{3T^2} - \frac{t^2}{T} + \frac{5t}{2} + \frac{16T}{6}$$

7)

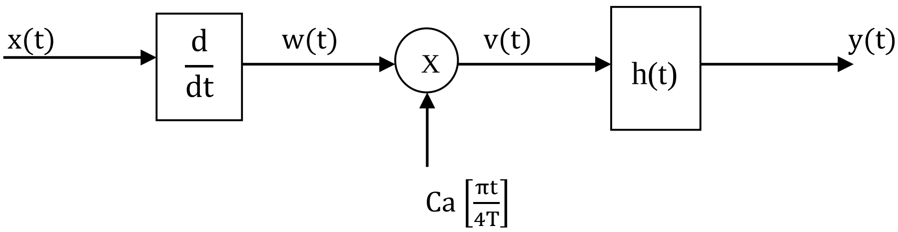
$-T \le t \le -\frac{T}{2}$ $\quad y(t) = -\int_{t+T}^{t+\frac{3}{2}T} -\frac{4}{T}\tau + 2\, d\tau + \int_{t+\frac{3}{2}}^{T}\left(-\frac{4}{T}\tau + 2\right)\frac{1}{T}\left[\tau - \left(t+\frac{5}{2}T\right)\right] d\tau$

$$y(t) = \left(2t + \frac{3t}{2}\right) - \frac{2t^3}{3T^2} - \frac{4t^2}{T} - \frac{11t}{2} - \frac{11T}{6} = -\frac{2t^3}{3T^2} - \frac{4t^2}{T} - \frac{7t}{2} - \frac{T}{3}$$

8)

$-\frac{T}{2} \le t \le 0$ $\quad y(t) = -\int_{t+T}^{T} -\frac{4}{T}\tau + 2\, d\tau = \frac{2}{T}(T^2 - t^2 - T^2 - 2tT) - 2(T - t - T) = -\frac{2t^2}{T} - 2t$

ESERCIZIO 11



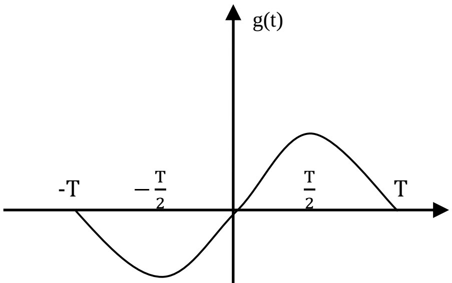
Con $x(t)= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \; g(t-2kT)$

$$g(t) = \begin{cases} -t^2 + tT & 0 \le t \le T \\ t^2 + tT & -T \le t \le 0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{4T}\,\mathrm{Ca}^2\left[\frac{\pi t}{4T}\right]\, e^{j\frac{\pi t}{T}}$$

Si calcoli $y(t)$

SVOLGIMENTO

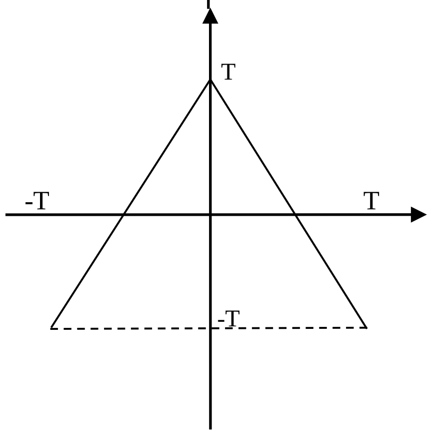


$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g'(t-2kT)$$

$$g'(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

$$g'(t) = (2t+T)\,\mathrm{rect}_T\left(t+\frac{T}{2}\right) + (T-2t)\mathrm{rect}_T\left(t-\frac{T}{2}\right) =$$

$$= 2T\,\mathrm{tri}_T(t) - T\,\mathrm{rect}_{2T}(t)$$

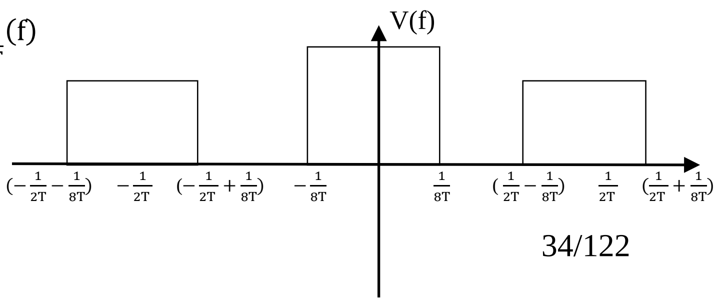


$$G'(f) = F\{g'(t)\} = 2T^2Ca^2(\pi T f) - 2T^2Ca(\pi 2Tf)$$

$$W_n = \frac{1}{2T}\, G'(f)|_{f=\frac{n}{2T}} = T\left[Ca^2\left(\frac{\pi n}{2}\right) - Ca(\pi n)\right]$$

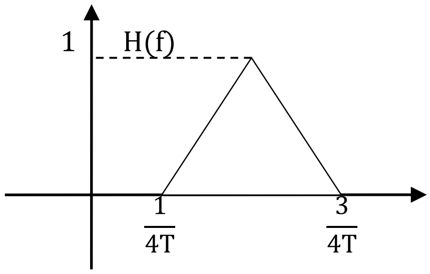
$$W(f) = \sum_n W_n\; u_0\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

$$v(t) = w(t)\cdot \mathrm{Ca}\left(\frac{\pi t}{4T}\right) \quad \leftrightarrow \quad V(f) = W(f) * 4T\,\mathrm{rect}_{\frac{1}{4T}}(f)$$



$$V(f) = 4T\sum_n \; W_n \;\; rect_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

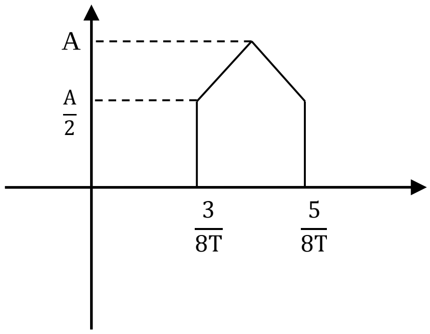
$$H(f) = \mathrm{tri}_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{2T}\right)$$



$$A = 4T\,W_1$$

$$W_1 = T\left[\mathrm{Ca}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \mathrm{Ca}\,(\pi)\right] = \frac{4T}{\pi^2}$$

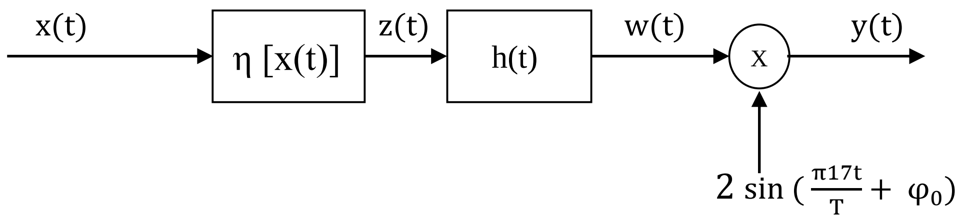
$$Y(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{4T}{\pi}\right)^2\left[\mathrm{tri}_{\frac{1}{8T}}\left(f - \frac{1}{2T}\right) + \mathrm{rect}_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{2T}\right)\right]$$



$$y(t) = \left[\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{Ca}^2\left(\frac{\pi t}{8T}\right) + \frac{1}{2\pi^2}\,\mathrm{Ca}\left(\frac{\pi t}{4T}\right)\right] e^{-j\frac{\pi t}{T}}$$

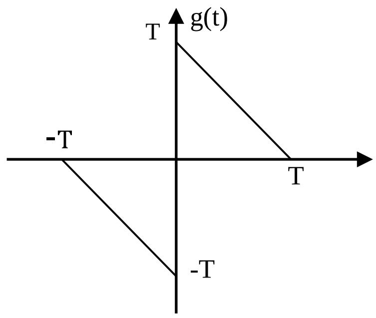
ESERCIZIO 12

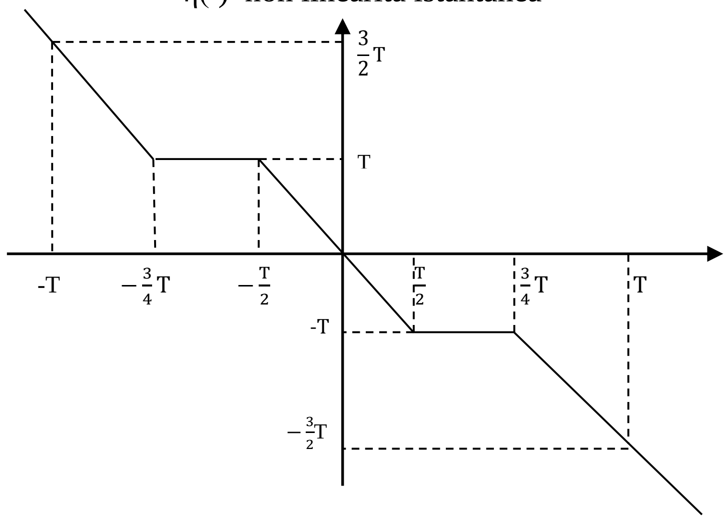
Dato il sistema



Con x(t) = $\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t-2kT)$,

η(·) non linearità istantanea

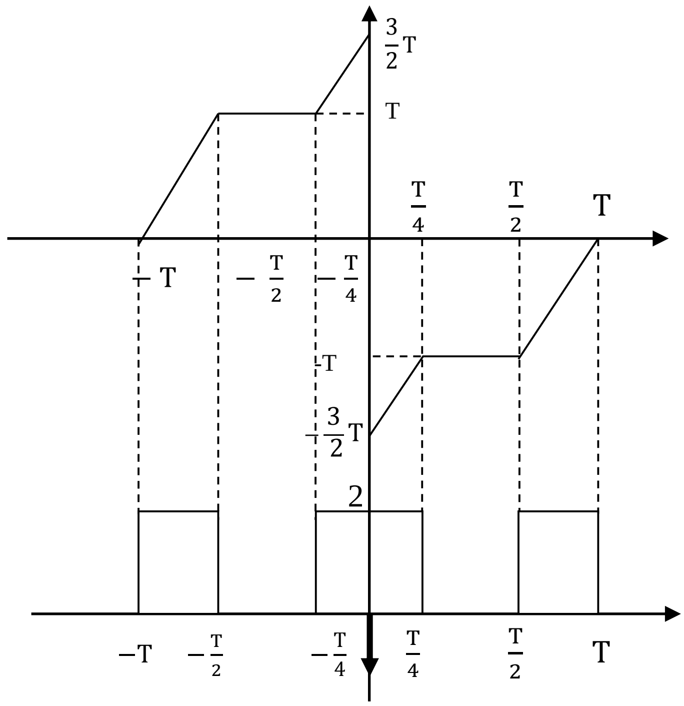




$h(t) = Ca\ [\pi \frac{5t}{2T}]$

Si calcoli la potenza di y(t)

SVOLGIMENTO



$v(t) = \eta[g(t)]$

$$\frac{dv(t)}{dt} = 2\left[\mathrm{rect}_{\frac{T}{2}}\left(t+\frac{3}{4}T\right) + \right.$$
$$\left. + \mathrm{rect}_{\frac{T}{2}}(t) + \mathrm{rect}_{\frac{T}{2}}\left(t-\frac{3}{4}T\right)\right] - 3T\,u_0(t)$$

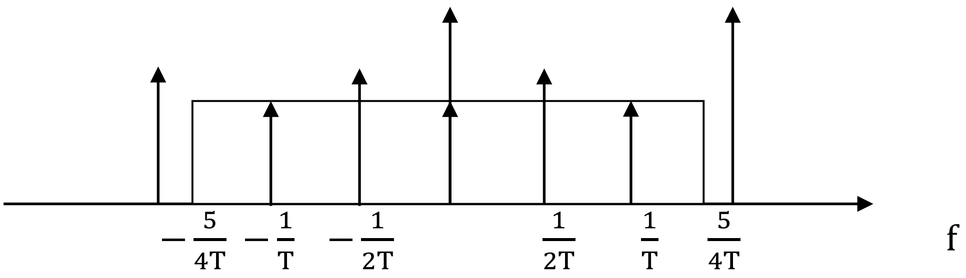
$$V(f) = \frac{1}{j2\pi f}\left\{T\,Ca\left(\pi\frac{T}{2}f\right)\cdot\right.$$
$$\left.\left[1+2\cos\left(2\pi\frac{3}{4}Tf\right)\right] - 3T\right\}$$

-3T

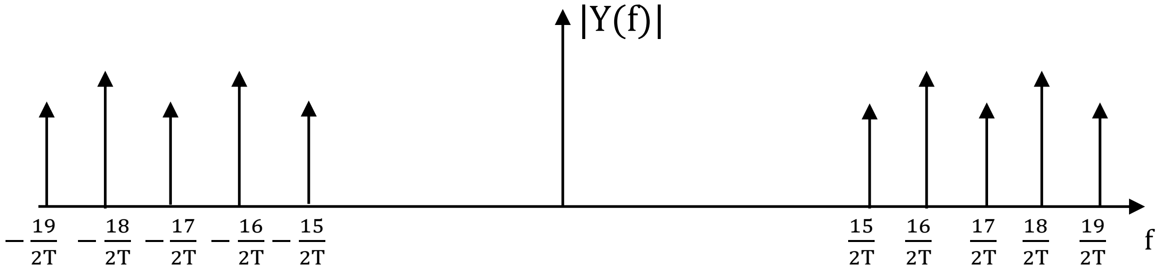
$$V_n = \frac{1}{2T}\, V(f)\big|_{f=\frac{n}{2T}} = \frac{T}{j2\pi n}\left\{ Ca\left(\frac{\pi}{4}n\right)\cdot\left[1+2\cos\left(\pi\frac{3}{4}n\right)\right]-3\right\}$$

$$V(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad V_n\ u_0\left(f-\frac{n}{2T}\right)$$

$$H(f) = F\{Ca\left(\frac{5\pi t}{2T}\right)\} = \frac{2T}{5}\,\mathrm{rect}_{\frac{5}{2T}}(f)$$



$$W(f) = \frac{2T}{5}\ \sum_{n=-2}^{2} \quad V_n \quad u_0\left(f-\frac{n}{2T}\right)$$



$$P_y = 2\,P_w = 2\cdot\left(\sum_{n=-2}^{2} |V_n|\left(\frac{2T}{5}\right)\right)^2 = \frac{8T^2}{25}\left(|V_0|^2 + 2|V_1|^2 + 2|V_2|^2\right)$$

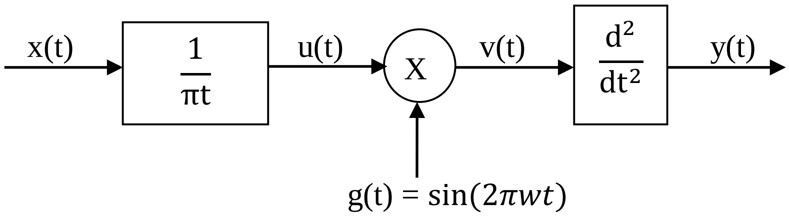
$$V_0 = \lim_{n\to 0} V_n = 0$$

$$V_1 = \frac{T}{j2\pi}\left\{\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(1-\sqrt{2}\right)-3\right\}$$

$$V_2 = \frac{T}{j4\pi}\left\{\frac{2}{\pi}-3\right\}$$

ESERCIZIO 13

Dato il sistema



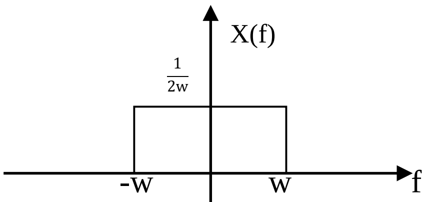
x(t) = $Ca\,[2\pi wt]$

determinare l'inviluppo complesso di y(t) rispetto alla frequenza $f_0 = w$

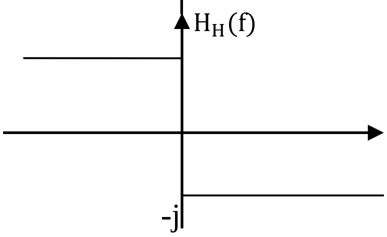
SVOLGIMENTO

$\underline{y}$ (t) = ?

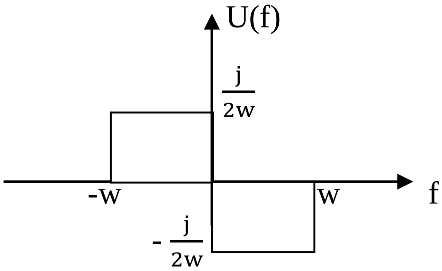
$X\,(f) = \frac{1}{2w}\mathrm{rect}_{2w}(f)$



$$H_H\,(f) = \begin{cases} j & f < 0 \\ 0 & f = 0 \\ -j & f > 0 \end{cases}$$



$U(f) = \frac{j}{2w}rect_w\left(f + \frac{w}{2}\right) - \frac{j}{2w}rect_w(f - \frac{w}{2})$

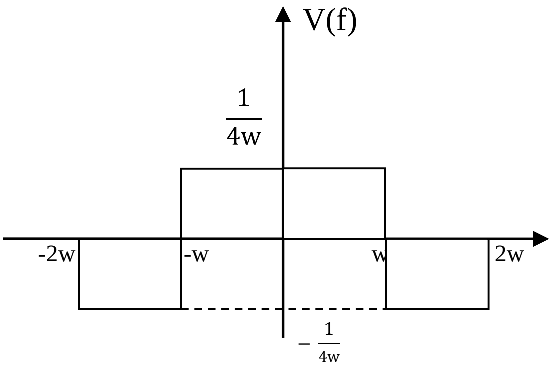


G(f) = $\frac{1}{2j}u_0(f-w) - \frac{1}{2j}\,u_0(f+w)$

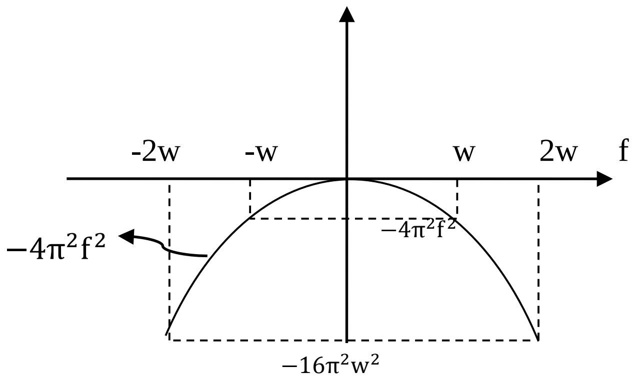
v(t) = u(t) sin (2πwt)

V(f) = U(f) * G(f)

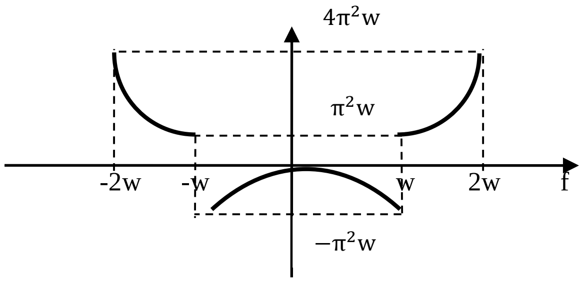
$$V(f) = \frac{1}{4w}\left[\mathrm{rect}_w\left(f-\frac{w}{2}\right) - \mathrm{rect}_w\left(f-\frac{3w}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + \ \mathrm{rect}_w\left(f+\frac{w}{2}\right) - \mathrm{rect}_w\left(f+\frac{3w}{2}\right)\right.$$



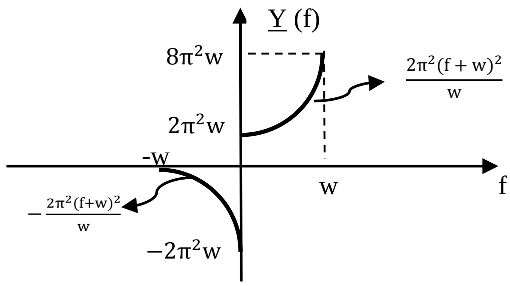
$y(t) = \frac{d^2 v(t)}{dt^2}$

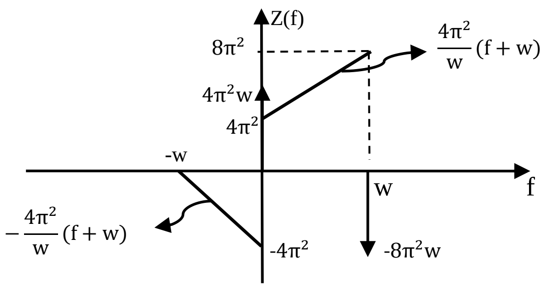


$Y(f) = V(f) \cdot (-4\pi^2 f^2)$



$\underline{Y(f)} = 2Y^{+}(f - f_0)$

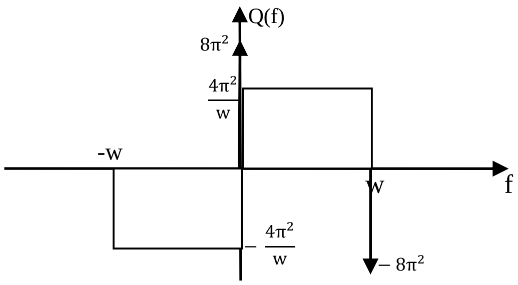




$$Z(f) = \frac{dY(f)}{df} = -\frac{4\pi^2}{w}(f+w)\,rect_w\left(f+\frac{w}{2}\right) + \frac{4\pi^2}{w}(f+w)\,rect_w\left(f-\frac{w}{2}\right) + 4\pi^2 w\, u_0(f) - 8\pi^2 w\, u_0(f-w)$$

Definendo P(f) come il segnale pari a Z(f), fatta esclusione degli impulsi in frequenza, si ha:

$$Q(f) = \frac{dP(f)}{df} = -\frac{4\pi^2}{w} rect_w\left(f+\frac{w}{2}\right) + \frac{4\pi^2}{w} rect_w\left(f-\frac{w}{2}\right) + 8\pi^2\, u_0(f) - 8\pi^2\, u_0(f-w)$$

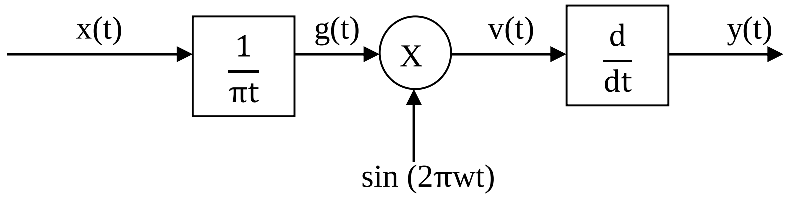


$p(t) = \frac{q(t)}{-j2\pi t}$

$y(t) = \frac{z(t)}{-j2\pi t}$; con $z(t) = 4\pi^2 w - 8\pi^2 w\, u_0\, e^{j2\pi wt} + p(t)$

ESERCIZIO 14

Dato il sistema

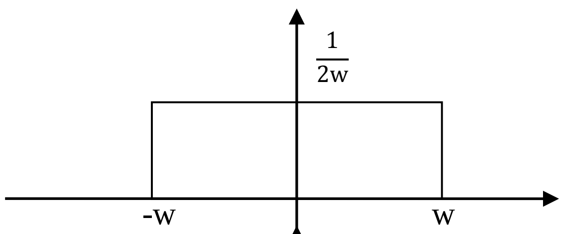


$x(t) = Ca\,[2\pi wt]$

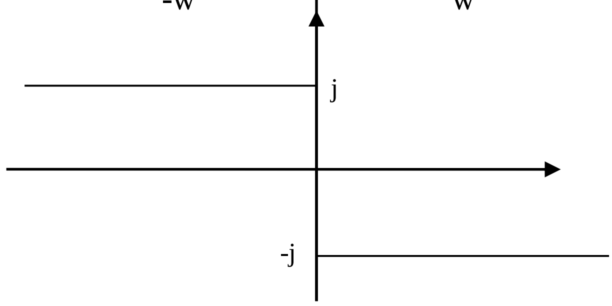
determinare l'espressione dell'uscita y(t)

SVOLGIMENTO

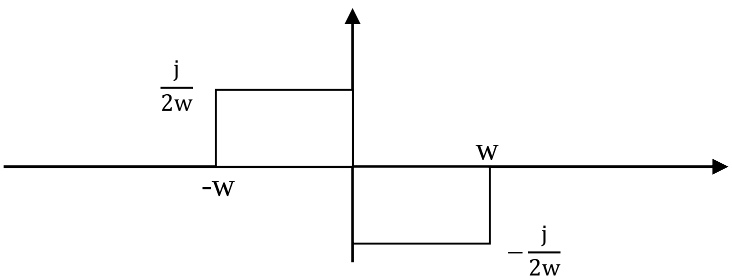
$X(f) = \frac{1}{2}\,\mathrm{rect}_{2w}(f)$



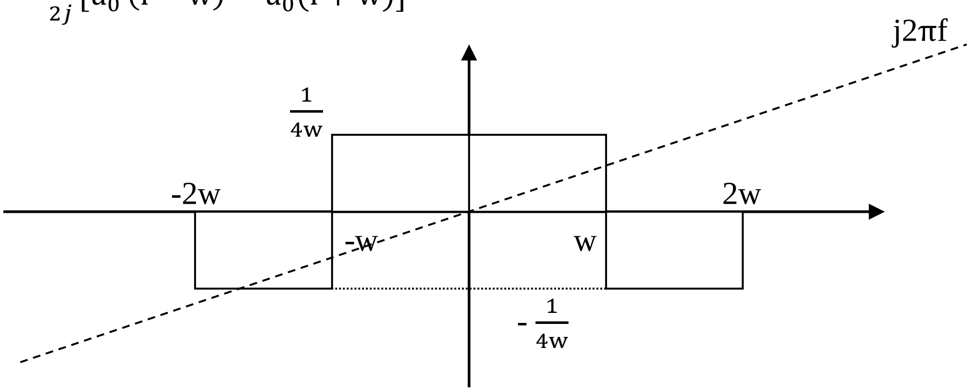
$$H_H(f)\begin{cases} j & per\ f < 0 \\ 0 & per\ f = 0 \\ -j & per\ f > 0 \end{cases}$$



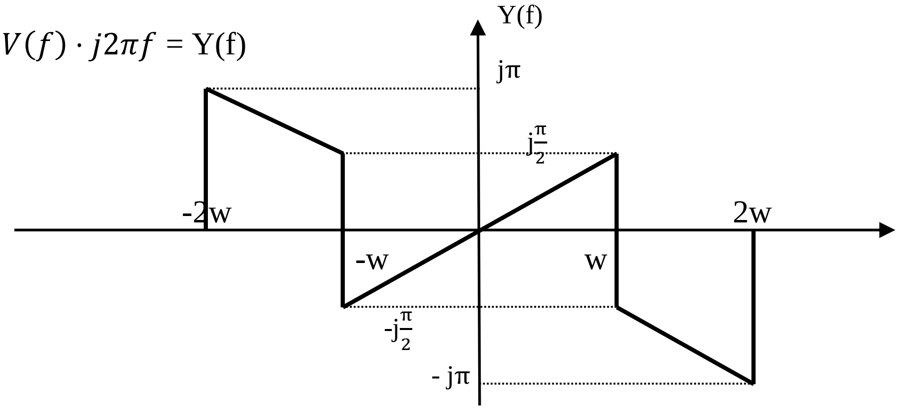
$G(f) = \frac{j}{2w}\left(\mathrm{rect}_w\left(f + \frac{w}{2}\right) - \mathrm{rect}_w\left(f - \frac{w}{2}\right)\right)$

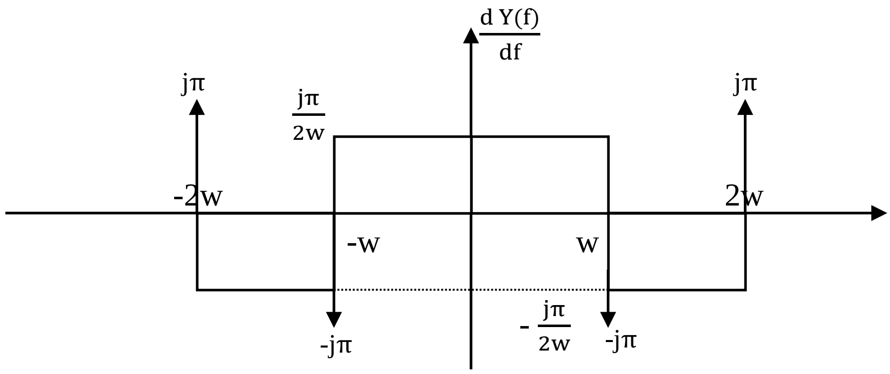


$V(f) = G(f) \;*\; \frac{1}{2j}\,[u_0\,(f - w) - u_0(f + w)]$



$y(t) = \frac{dv(t)}{dt} \leftrightarrow V(f) \cdot j2\pi f = Y(f)$





$$\frac{dY(f)}{df} = -\frac{j\pi}{2w}\mathrm{rect}_w\left(f+\frac{3}{2}w\right)+\frac{j\pi}{2w}\mathrm{rect}_w\left(f+\frac{1}{2}w\right)+\frac{j\pi}{2w}\mathrm{rect}_w\left(f-\frac{1}{2}w\right)-\frac{j\pi}{2w}\mathrm{rect}_w\left(f-\frac{3}{2}w\right)+$$
$$j\pi\ \ u_0(f+2w)-j\pi\ \ u_0(f+w)-j\pi\ \ u_0(f-w)+j\pi\ \ u_0(f-2w)$$

$$F^{-1}\left\{\frac{dY(f)}{df}\right\} = -\frac{j\pi}{2}\,\mathrm{Ca}\,[\pi wt]\,e^{-j3wt}+\frac{j\pi}{2}\,\mathrm{Ca}\,[\pi wt]\,e^{-jwt}+\frac{j\pi}{2}\,\mathrm{Ca}\,[\pi wt]\,e^{jwt}-\frac{j\pi}{2}\,\mathrm{Ca}\,[\pi wt]\,e^{j3wt}+$$
$$+j\pi\, e^{-j4\pi wt}-\ j\pi\, e^{-j2\pi wt}-\ j\pi\, e^{j2\pi wt}+\ j\pi\, e^{j4\pi wt}$$

In conclusione, il segnale in uscita dallo schema a blocchi risulta essere dato da:

$$y(t) = \frac{j}{2\pi t}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{dY(f)}{df}\right\}$$

ESERCIZIO 15 (ESAME DEL 18/06/2001)

Data la variabile aleatoria congiunta (X,Y) con funzione di densità di probabilità:

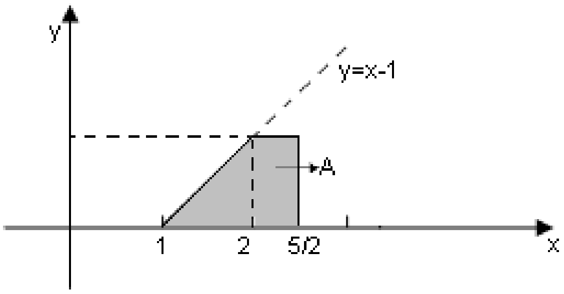
$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}k & 0\le y\le x-1 \quad ;\ 1\le x\le 2\\ k & 0\le y\le 1 \quad ;\ 2\le x\le 5/2\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Si calcoli la funzione di densità di probabilità $p_{X/Z}(x/z)$, essendo Z la variabile aleatoria ottenuta con la trasformazione Z=X+Y-1

SVOLGIMENTO:

Graficando la $p_{X,Y}(x,y)$ si ottiene:

$$p_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}k\ (x,y)\ \in A\\ 0\ (x,y)\ \notin A\end{cases}$$



Affinché la $p_{X,Y}(x,y)$ sia una densità di probabilità dovrà essere verificata la condizione di normalizzazione, ovvero:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{dxdy}=1 \quad\rightarrow\quad \mathrm{k}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right]=\mathrm{k}=1$$

A questo punto, per calcolare la $p_{X,Z}(x,z)$, poniamo

$$\begin{cases}z=x+y-1\\ \partial=x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\partial\\ y=z-\partial+1\end{cases}$$

Si ottiene

$$p_{Z,\Delta}(z,\partial)=p_{X,Y}[g_1(z,\partial);\ g_2(z,\partial)]\cdot|J(z,\partial)|=k\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=k \qquad ;per\ (z,\partial)\in B$$

ove B è il dominio di definizione della funzione densità di probabilità $p_{Z,\Delta}(z,\partial)$ ottenuta dal dominio A di definizione della $p_{X,Y}(x,y)$ nel modo che segue.
Essendo

$$A=\begin{cases}0\le y\le x-1 & 1\le x\le 2\\ 0\le y\le 1 & 2\le x\le 5/2\\ 0 & altrove\end{cases}$$

e osservando che

$$\begin{cases} x = \partial \\ y = z - \partial + 1 \end{cases}$$

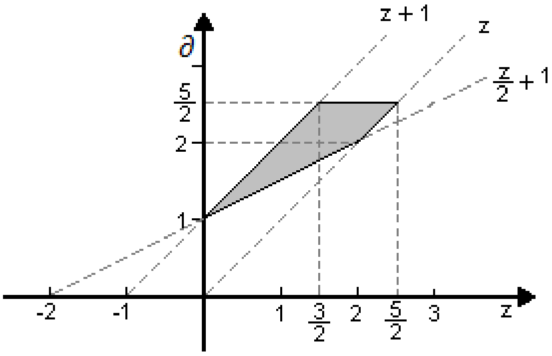
si ha

$$B = \begin{cases} 0 \le z - \partial + 1 \le x - 1 & 1 \le \partial \le 2 \\ 0 \le z - \partial + 1 \le 1 & 2 \le \partial \le 5/2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} \frac{z}{2} + 1 \le \partial \le z + 1 & 1 \le \partial \le 2 \\ z \le \partial \le z + 1 & 2 \le \partial \le 5/2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Si ha quindi che

$$p_{Z,\Delta}(z, \partial) = \begin{cases} k \ (z, \partial) & \in B \\ 0 & altrove \end{cases}$$

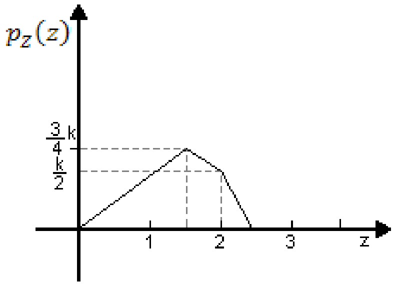


Essendo poi

$$p_{\Delta/Z}(\partial/z) = \frac{p_{Z,\Delta}(z, \partial)}{p_Z(z)}$$

è quindi necessario calcolare la $p_Z(z)$, che può essere ottenuta per saturazione dalla funzione di densità di probabilità congiunta $p_{Z,\Delta}(z, \partial)$, ossia $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Z,\Delta}(z, \partial) \mathrm{d}\,\partial$. Si ottiene quindi

$$p_Z(z) = \begin{cases} 0 & (z < 0) \cup \left(z > \frac{5}{2}\right) \\ \int_{\frac{z}{2}+1}^{z+1} k d\partial = k\left[z + 1 - \frac{z}{2} - 1\right] = k\frac{z}{2} & ; 0 \le z \le \frac{3}{2} \\ \int_{\frac{z}{2}+1}^{\frac{5}{2}} k d\partial = k\left[\frac{5}{2} - \frac{z}{2} - 1\right] = k\left(-\frac{z}{2} + \frac{3}{2}\right) & ; \frac{3}{2} \le z \le 2 \\ \int_{z}^{5/2} k d\partial = k\left[-z + \frac{5}{2}\right] & ; 2 \le z \le 5/2 \end{cases}$$



Si noti che la funzione di densità di probabilità $p_Z(z)$ soddisfi la condizione di normalizzazione. Ovvero

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_Z(z)dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}k\cdot\frac{3}{2}+\frac{k}{8}+\frac{(\frac{k}{2}+\frac{3}{4}k)\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{8}k+\frac{k}{8}+\frac{5}{16}k=\frac{9+2+5}{16}k=k=1$$

In sintesi si ottiene

$$p_{X/Z}(x/z)=\begin{cases}\frac{2}{z} & ;per\ \ \frac{z}{2}+1\leq x\leq z+1 \qquad con\ 0\leq z\leq\frac{3}{2}\\ \frac{2}{3-z} & ;\ per\ \ \frac{z}{2}+1\leq x\leq\frac{5}{2} \qquad con\ \frac{3}{2}\leq z\leq 2\\ \frac{2}{5-2z} & ;\ per\ z<x<\frac{5}{2} \qquad con\ 2<z<\frac{5}{2}\end{cases}$$

Si noti che la funzione di densità di probabilità $p_{X/Z}(x/z)$ soddisfa la condizione di normalizzazione, infatti

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{X/Z}(x/z)dx=\begin{cases}\int_{\frac{z}{2}+1}^{z+1}\frac{2}{z}dx=\frac{2}{z}\left[z+1-\frac{z}{2}-1\right]=1 & per\ 0\leq z\leq\frac{3}{2}\\ \int_{\frac{z}{2}+1}^{\frac{5}{2}}\frac{2}{3-z}dx=\frac{2}{3-z}\left[\frac{5}{2}-\frac{z}{2}-1\right]=1 & per\ \frac{3}{2}\leq z\leq 2\\ \int_{z}^{5/2}\frac{2}{5-2z}dx=\frac{2}{5-z}\left[\frac{5}{2}-z\right]=1 & per\ 2\leq z\leq\frac{5}{2}\end{cases}$$

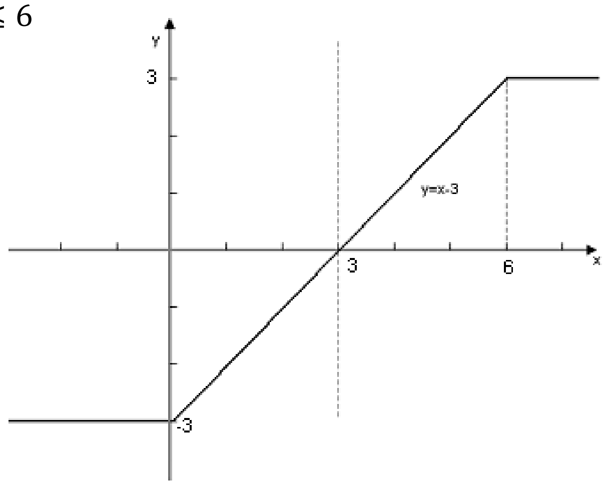
ESERCIZIO 16 (ESAME DEL 28/11/2007)

Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità pari a

$$p_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-3|}$$

Si calcoli il valore atteso e varianza delle variabile aleatoria Y ottenuta da X tramite la trasformazione y=f(x) con:

$$f(x) = \begin{cases} -3 & ; \ x \le 0 \\ x-3 & ; \ 0 \le x \le 6 \\ 3 & ; \ x = 6 \end{cases}$$



SVOLGIMENTO:

Si osservi che la funzione di densità di probabilità $p_X(x)$ soddisfa la

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-3|}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|}dt = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t}dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_{0}^{+\infty} = 1$$

Si ricordi che

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} p_X\big(g_i(y)\big) \cdot \left|\frac{dg_i(y)}{dy}\right|$$

Si osservi che

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(x-3)} & ; \ x \ge 3 \\ \frac{\lambda}{2} e^{\lambda(x-3)} & ; \ x \le 3 \end{cases}$$

Per ciò che riguarda la $p_Y(y)$, si ha

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0 & ;\ y < -3 \\ \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2} e^{+\lambda(x-3)} dx\right] \mu_0(y+3) & ; y = -3 \\ \frac{\lambda}{2} e^{+\lambda[(y+3)-3]} \cdot 1 = \frac{\lambda}{2} e^{+\lambda y} & ;\ -3 < y \leq 0 \\ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda[(y+3)-3]} \cdot 1 = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda y} & ;\ 0 \leq y < 3 \\ \left[\int_{6}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x - 3} dx\right] \mu_0(y-3) & ; y = 3 \\ 0 & ;\ y > 3 \end{cases}$$

$posto\ x - 3 = \theta$

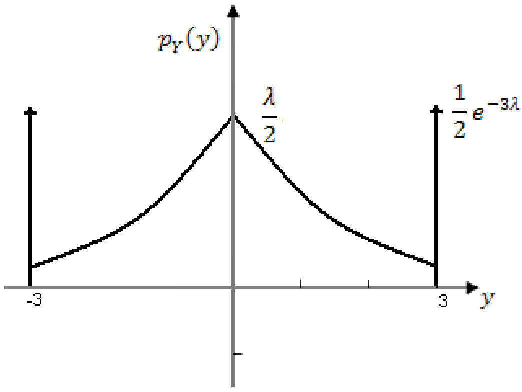
$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda(x-3)} dx = \int_{-\infty}^{-3} \frac{\lambda}{2} e^{\lambda\theta} d\theta = \left[\frac{1}{2} e^{-\lambda\theta}\right]_{-\infty}^{-3} = \frac{1}{2} e^{-3\lambda} \qquad per\ y = -3$$

$$p_Y(y) = \int_{3}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(x-3)} dx = \int_{3}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda\theta} d\theta = \left[-\frac{1}{2} e^{-\lambda\theta}\right]_{3}^{+\infty} = \frac{1}{2} e^{-3\lambda} \qquad per\ y = 3$$

In sintesi

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0 & ;\ |y| < -3 \\ \frac{1}{2} e^{-3\lambda} \mu_0(y+3) & ; y = -3 \\ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} & ;\ -3 < y < 3 \\ \frac{1}{2} e^{-3\lambda} \mu_0(y-3) & ; y = 3 \end{cases}$$

$$p_Y(y) = \frac{e^{-3\lambda}}{2}[\mu_0(y-3) + \mu_0(y+3)] + \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|} rect_6(y)$$



Si osservi che $p_Y(y)$ soddisfi la condizione di normalizzazione, infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)dy = e^{-3\lambda} + \int_{-3}^{0} \frac{\lambda}{2}e^{\lambda y}dy + \int_{0}^{3} \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda y}dy = e^{-3\lambda} + \frac{1}{2}\left\{\left[e^{\lambda y}\right]_{-3}^{0} + \left[e^{-\lambda y}\right]_{0}^{3}\right\}$$
$$= e^{-3\lambda} + \frac{1}{2}\{1 - e^{-3\lambda} - e^{-3\lambda} + 1\} = e^{-3\lambda} - e^{-3\lambda} + 1 = 1$$

Il valore atteso

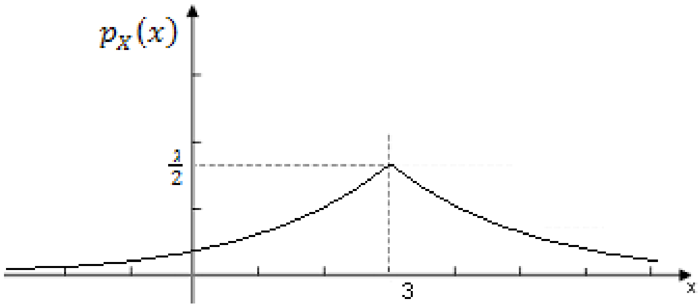
$$m_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y)dy = 0$$

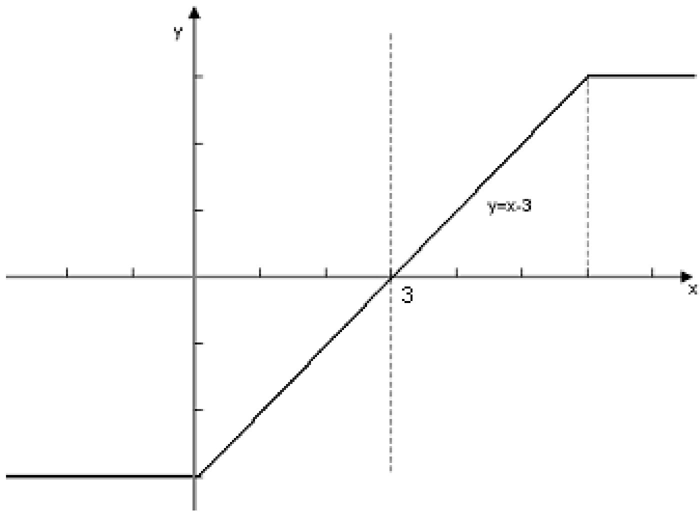
La varianza

$$\sigma_y^2 = m_y^{(2)} - m_y^{\,2} = m_y^{(2)=}$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p_Y(y)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \left[\frac{e^{-3\lambda}}{2}[\mu_0(y-3) + \mu_0(y+3)] + \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}rect_6(y)\right]dy$$
$$= \frac{e^{-3\lambda}}{2}[9+9] + \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|y|}rect_6(y)\,dy = 9\frac{e^{-3\lambda}}{2} + [-y^2e^{-\lambda y}]_0^3$$
$$+ \int_0^3 2ye^{-\lambda y}dy = 9e^{-3\lambda} - 9e^{-3\lambda} + \left[-\frac{1}{\lambda}2ye^{-\lambda y}\right] + \frac{2}{\lambda}\int_0^3 e^{-\lambda y}dy = -\frac{6}{\lambda}e^{-3\lambda}$$
$$+ \frac{2}{\lambda}[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda y}]_0^3 = -\frac{6}{\lambda}e^{-3\lambda} - \frac{2}{\lambda^2}\left[e^{-3\lambda} - 1\right] = \frac{2}{\lambda^2} - e^{-3\lambda}[\frac{6}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}]$$

In alternativa si può procedere come segue

$$\begin{cases} y = f(x) \\ p_X(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-3|} \end{cases}$$





$$E\{y\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) p_X(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -3 p_X(x) dx + \int_{0}^{6} (x-3) p_X(x) dx + \int_{6}^{+\infty} 3 p_X(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -3 \ \frac{\lambda}{2} e^{+\lambda(x-3)} \ dx + \int_{0}^{6} (x-3) \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-3|} \ dx + \int_{6}^{+\infty} 3 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(x-3)} \ dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-3} -3 \ \frac{\lambda}{2} e^{+\lambda t} \ dt + \int_{-3}^{3} (x-3) \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|} \ dt + \int_{3}^{+\infty} 3 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \ dt =$$

$$= \int_{+\infty}^{3} 3 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \ dt + 0 + \int_{3}^{+\infty} 3 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \ dt =$$

$$- \int_{3.}^{+\infty} 3 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \ dt + \int_{3}^{+\infty} 3 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \ dx = 0$$

E per la varianza

$$\sigma_y^2 = E\{(y - m_y)^2\} = E\{y^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 p_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 9p_X(x)dx + \int_{0}^{6} (x-3)^2 p_X(x)dx + \int_{6}^{+\infty} 9p_X(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 9 \ \frac{\lambda}{2} e^{+\lambda(x-3)} \ dx + \int_{0}^{6} (x-3)^2 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-3|} \ dx + \int_{6}^{+\infty} 9 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda(x-3)} \ dx$$

$$= \int_{+\infty}^{3} -9 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \ dt + \int_{-3}^{3} t^2 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|t|} \ dt + \int_{3}^{+\infty} 9 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \ dt =$$

x-3=-t   x-3=t   x-3=t

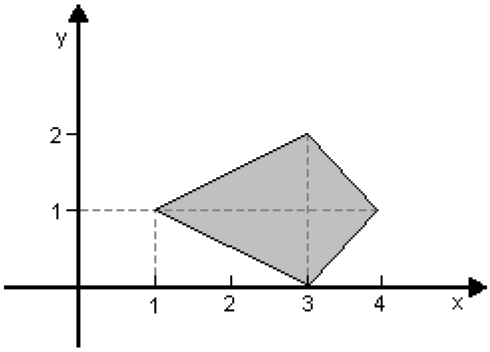
$$= \int_{3}^{+\infty} 9 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \ dt + 2\int_{0}^{3} t^2 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \ dt = \left[-9e^{-\lambda t}\right]_3^{+\infty} + 2\int_{0}^{3} t^2 \ \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda t} \ dt =$$

$$= 9e^{-3\lambda} + \int_{0}^{3} t^2 \lambda e^{-\lambda t} \ dt = \frac{2}{\lambda} - e^{-3\lambda}[\frac{6}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}]$$

ESERCIZIO 17 (ESAME DEL 25/02/2005)

Si consideri la variabile aleatoria bidimensionale (X,Y) avente funzione di densità di probabilità

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \notin A \end{cases}$$



Si calcoli la densità di probabilità della variabile aleatoria Z=X-2Y

SVOLGIMENTO:

Il dominio della $p_{X,Y}(x,y)$ indicato in figura 1a

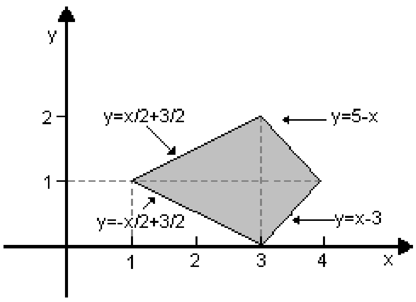


Figura 1a

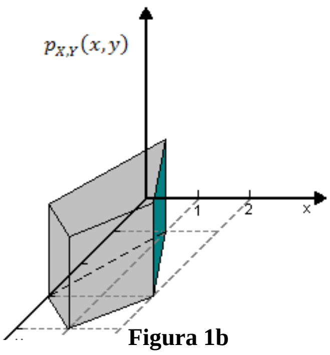


Figura 1b

e espresso analitacamente come segue

$$A = \begin{cases} -\frac{x}{2}+\frac{3}{2} \le y \le \frac{x}{2}+\frac{1}{2} & ;\ 1 \le x \le 3 \\ x-3 \le y \le -x+5 & ;\ 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

Il valore k si determina imponendo la condizione di normalizzazione,ovvero il volume del solido in figura 1b deve essere 1

$$\int_A p_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{dxdy} = 1 \quad \rightarrow \quad \mathrm{k[area\ A] = k[2+1] = 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}}$$

$$\begin{cases} Z = X - 2Y \\ X = X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{X-Z}{2} \\ X = X \end{cases}$$

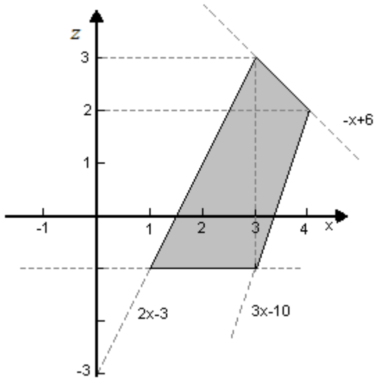
$$p_{X,Z}(x,z) = p_{X,Y}\left[\ x, \frac{x-z}{2}\right] \cdot |J| \qquad \text{ove } J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Si individuino l'insieme B nel piano (X,Z) in cui è definita $p_{X,Z}(x,z)$

$$B=\begin{cases}-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\le\frac{x}{2}-\frac{z}{2}\le\frac{x}{2}+\frac{1}{2} & ;\ 1\le x\le 3\\ x-3\le\frac{x}{2}-\frac{z}{2}\le -x+5 & ;3\le x\le 4\end{cases}$$

$$B=\begin{cases}-x+\frac{3}{2}\le-\frac{z}{2}\le+\frac{1}{2} & ;\ 1\le x\le 3\\ \frac{x}{2}-3\le-\frac{z}{2}\le-\frac{3}{2}x+5 & ;3\le x\le 4\end{cases}$$

$$B=\begin{cases}-1\le z\le 2x-3 & ;\ 1\le x\le 3\\ 3x-10\le z\le -x+6 & ;3\le x\le 4\end{cases}$$



Risulta quindi $p_{X,Z}(x,z)=\begin{cases}\frac{k}{2} & (x,z)\in B\\ 0 & altrove\end{cases}$

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Z}(x,z)\mathrm{d}\,x$$

$$per\ z\le -1\qquad p_Z(z)=0$$

$$per-1\le z\le 2\qquad p_Z(z)=\int_{\frac{z+3}{2}}^{\frac{z+10}{3}}\frac{k}{2}\mathrm{d}\,x=\frac{k}{2}[\frac{z}{3}+\frac{10}{3}-\frac{z}{2}-\frac{3}{2}=\frac{k}{2}[-\frac{z}{6}+\frac{11}{6}]$$

$$per\ 2\le z\le 3\qquad p_Z(z)=\int_{\frac{z+3}{2}}^{6-z}\frac{k}{2}\mathrm{d}\,\partial=\frac{k}{2}[6-z-\frac{z}{2}-\frac{3}{2}=\frac{k}{2}[\frac{9}{2}-\frac{3}{2}z]$$

$$per\ z\ge 3\qquad p_Z(z)=0$$

Si osservi che la $p_Z(z)$ soddisfa la condizione di normalizzazione, ovvero

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p_z(z)\mathrm{d}\,z=\int_{-1}^{2}\left(-\frac{z}{6}+\frac{11}{6}\right)\frac{1}{6}dx+\int_{2}^{3}\left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}z\right)\frac{1}{6}dx=\frac{1}{6}-\left[\frac{z^2}{12}+\frac{11}{6}z\right]_{-1}^{2}+\frac{1}{3}\left[\frac{9}{2}z-\frac{3}{4}z^2\right]_{2}^{3}=1$$

ESERCIZIO 18

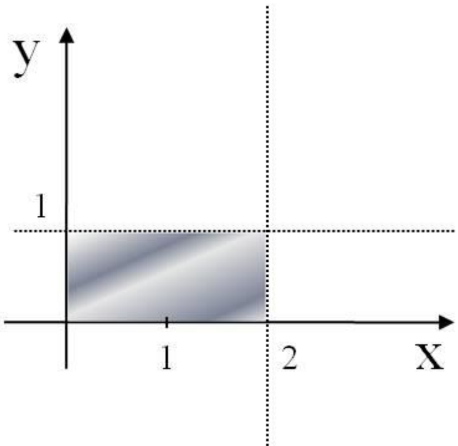
È data la variabile aleatoria bidimensionale (X,Y) con funzione di densità di probabilità

$$p_{XY}(x,y) = k \cdot y \cdot rect_1(y-0.5) \cdot rect_2(x-1)$$

Si calcoli la $p_{Z/W}(z/w)$ essendo z=x+y e w=x-y, dopo aver calcolato k.

SVOLGIMENTO:

La funzione di densità di probabilità fornita deve rispettare la proprieà di normalizzazione, ovvero il suo integrale esteso a tutto il dominio di definizione deve essere pari ad 1. Si ha pertanto, sulla base degli intervalli di definizione per x e y:



$$\iint p_{XY}(x,y)\,dxdy = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1} k \cdot y\,dxdy = 2k\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = k \,\square\, 1$$

Avendo determinato che k=1, è possibile effettuare il cambiamento di variabili richiesto:

$$\begin{cases} z = x+y \\ w = x-y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{z+w}{2} \\ y = \dfrac{z-w}{2} \end{cases}$$

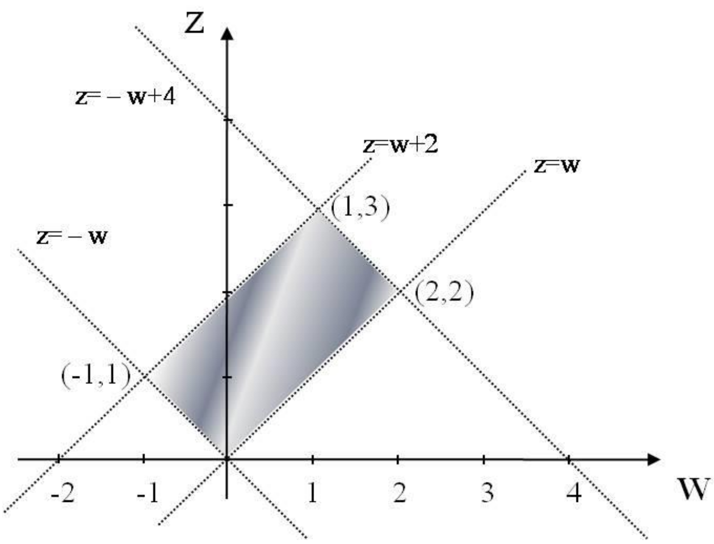
Il modulo dello Jacobiano è dato da

$$J(z,w) = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

La densità di probabilità congiunta $p_{ZW}(z,w)$ si può pertanto calcolare come

$$p_{ZW}(z,w)=\frac{1}{2}\left(\frac{z-w}{2}\right)\cdot \mathrm{rect}_1\left(\frac{z-w}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot \mathrm{rect}_2\left(\frac{z+w}{2}-1\right)=$$
$$=\left(\frac{z-w}{4}\right)\cdot \mathrm{rect}_2(z-w-1)\cdot \mathrm{rect}_4(z+w-2)$$

Graficando si ottiene:



La densità di probabilità $p_{Z/W}(z/w)$ può essere ottenuta come

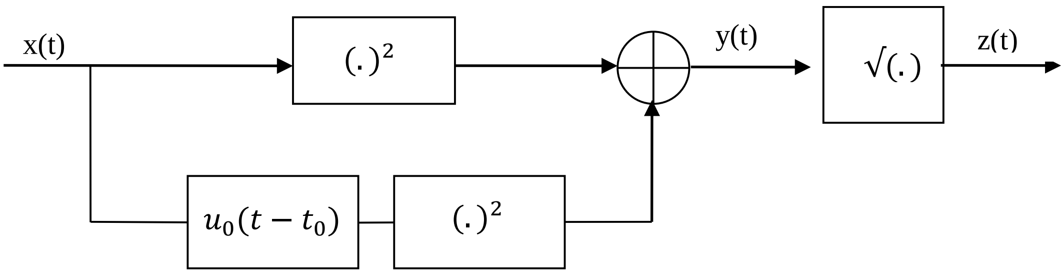
$$p_{Z/W}(z/w)=\frac{p_{ZW}(z,w)}{p_W(w)}$$

ed assume valori per $0<z<3$, dove la $p_W(w)$ è valida per $-1<w<2$ e si può ottenere per saturazione della funzione di densità di probabilità congiunta $p_{ZW}(z,w)$ come:

$$p_Z(w)=\begin{cases}\frac{1}{4}\int_{-w}^{w+2}(z-w)dz=\frac{1}{4}\left[\frac{z^2}{2}-wz\right]_{-w}^{w+2}=\frac{1}{2}\left(1-w^2\right), & -1<w<0\\ \frac{1}{4}\int_{w}^{w+2}(z-w)dz=\frac{1}{4}\left[\frac{z^2}{2}-wz\right]_{w}^{w+2}=\frac{1}{2}, & 0<w<1\\ \frac{1}{4}\int_{w}^{-w+4}(z-w)dz=\frac{1}{4}\left[\frac{z^2}{2}-wz\right]_{w}^{-w+4}=\frac{1}{2}\left(4-4w+w^2\right), & 1<w<2\\ 0, \quad \text{altrove} & \end{cases}$$

ESERCIZIO 19 (ESAME DEL 13/09/2002)

Con riferimento allo schema di figura



Sia x(t) una realizzazione di un processo gaussiano ergodico a <u>valor medio nullo</u> e spettro di densita di potenza

$$P_{xx}(f) = N_0 rect_{2w}(f)$$

Si calcoli:

- il valore atteso E{y(t)} ed il valore quadratico atteso E{y^2(t)} di y(t), <u>con t_0 generico</u>
- le gerarchie di ordine 1 $p_z(z)$ di z, per $t_0 = \frac{1}{2w}$

SVOLGIMENTO:

Il processo X(t) è per ipotesi gaussiano, stazionario ed ergodico, quindi risultano essere stazionari ed ergodici anche i processi ottenuti da X(t) mediante trasformazioni lineari (quale il filtraggio in figura) o non linearità instantanee quali la potenza di ordine n. Quindi i processi Y(t) e Z(t) risultano essere stazionari ed ergodici.

$$E\{y(t)\} = E\{x^2(t) + x^2(t-t_0)\} = E\{x^2(t)\} + E\{x^2(t-t_0)\} = \widetilde{x_1^2}^{X_1} + \widetilde{x_2^2}^{X_2} = 2\widetilde{x_1^2}^{X_1} = 2\sigma_x^2$$
$$= 2P_X$$

$$k_x(\tau) = m_x{}^{(1,1)}(\tau) - m_x{}^2 = p_{xx}(\tau) \implies \sigma_x^2 = k_{xx}(0) = p_{xx}(0)$$

Perciò

$$E\{y(t)\} = 2P_X = 2\int_{-\infty}^{+\infty} p_{xx}(\tau) = 4wN_0$$

$$E\{y^2(t)\} = E\{[x^2(t) + x^2(t-t_0)]^2\} = E\{x^4(t)\} + E\{x^4(t-t_0)\} + 2E\{x^2(t)x^2(t-t_0)\} =$$

$$= 2\widetilde{x_1^4}^{X_1} + 2\widetilde{x_1^2 x_2^2}^{X_1X_2;t_0} = 2m_x{}^{(4)} + 2m_x{}^{(2,2)}(t_0)$$

Ergodicità e stazionarietà

Per una variabile aleatoria Gaussiana si ha che

$$\mu^n = E\{(x-m_x)^n\} = \begin{cases} 0 & ; n\ dispari \\ 1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)\sigma_x^n & ;\ \ n\ \ pari \end{cases}$$

Da cui

$$m_x^{(4)} \underset{m_x = 0}{=} 1 \cdot 3 \cdot \sigma_x^{\ 4} = 3\sigma_x^{\ 4} = 3P_x^{\ 2} = 3(2wN_0)^2 = 12w^2N_0^{\ 2}$$

Per calcolare $\widetilde{x_1^2 x_2^2}^{X_1X_2;t_0}$, si ricorda che date quattro variabili aleatorie congiuntamenet gaussiane si ha che:

$$\mu_x^{(1,1,1,1)} = E\{(x_1 - m_{x_1})(x_2 - m_{x_2})(x_3 - m_{x_3})(x_4 - m_{x_4})\} =$$

$$= \sigma_{x_1x_2} \cdot \sigma_{x_3x_4} + \sigma_{x_1x_3} \cdot \sigma_{x_2x_4} + \sigma_{x_1x_4} \cdot \sigma_{x_2x_3}$$

Per $x_1 = x_3$ e $x_2 = x_4$

$$E\left\{(x_1 - m_{x_1})^2 (x_2 - m_{x_2})^2\right\} = 2\,\sigma_{x_1x_2}^2 + \sigma_{x_1}^2\sigma_{x_2}^2$$

E perciò, essendo un processo stazionario, per il quale $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2}$ si ha essendo $m_x = 0$

$$E\{x_1^{\ 2}x_2^{\ 2}\} = 2\,\sigma_{x_1x_2}^2 + \sigma_x^4 = 2[m_x^{(1,1)}(t_0)]^2 + P_x^{\ 2} \underset{\text{ergodicità}}{=} 2p_{xx}^{\ 2}(t_0) + P_x^{\ 2}$$

Da cui

$$E\{y^2(t)\} = 24w^2N_0^{\ 2} + 4p_{xx}^{\ 2}(t_0) + 2P_x^{\ 2} \qquad ;\ con\ \ p_{xx}^{\ 2}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{P_x\} = 2wN_0 sinc(\pi 2wt)$$

Perciò

$$E\{y^2(t)\} = 24w^2N_0^{\ 2} + 8w^2N_0^{\ 2} + 16w^2N_0^{\ 2}sinc^2(\pi 2wt_0) =$$

$$= 32w^2N_0^{\ 2} + 16w^2N_0^{\ 2}sinc^2(\pi 2wt_0)$$

Si calcoli adesso la gerarchia del primo ordine del processo Z(t). Si osserva che il processo Z(t) non è un processo gaussiano essendo stato ottenuto dal processo X(t) gaussiano in seguito anche ad operazioni non lineari.

$$z = \sqrt{y(t)} = \sqrt{x^2(t) + x^2(t - t_0)} \qquad ; \quad t_0 = \frac{1}{2w}$$

La variabile aleatoria Z si ottiene come la radice quadrata della somma dei quadrati di due variabili aleatorie gaussiane aventi valore atteso nullo e stessa varianza. Se le due variabili fossero statisticamente indipendenti, la variabile Z sarebbe a distribuzione di Raileigh.

Si osservi che

$$p_{xx}(t_0) = 2wN_0 sinc(\pi 2wt_0) = 2wN_0 sinc\left(\pi 2w\frac{1}{2w}\right) = 0$$

Pertanto le due v.a. estratte a distanza $t_0 = \frac{1}{2w}$ sono incorrelate, ed essendo gaussiane sono anche staticamente indipendenti. Per cui

$$p_{X_2X_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{(x_1 - m_{x_1})^2}{{\sigma_{x_1}}^2} + \frac{2\rho(x_1 - m_{x_1})(x_2 - m_{x_2})}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} + + \frac{(x_2 - m_{x_2})^2}{{\sigma_{x_1}}^2}\right\}$$

$$con \quad \begin{cases} m_{x_1} = 0 \\ m_{x_2} = 0 \\ \sigma_{x_1} = \sigma_{x_1} = \sigma_x = \sqrt{P_x} \end{cases} \qquad \rho = \frac{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} = \frac{{m_x}^{(1,1)}}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \underset{\text{Ergodicità}}{=} \frac{p_{xx}(t_0)}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}$$

$$p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\, {\sigma_x}^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{{x_1}^2}{{\sigma_x}^2} + \frac{{x_2}^2}{{\sigma_x}^2}\right]\right\} = \frac{1}{2\pi\, {\sigma_x}^2} e^{-\frac{({x_1}^2 + {x_2}^2)}{2\,{\sigma_x}^2}} \underset{\text{Stat. indip}}{=} p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)$$

Per calcolare la $p_Z(z)$ applichiamo la trasformazione

$$\begin{cases} z = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2} \\ \theta = arctg\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = z\cos\theta \\ x_2 = z\, sen\,\theta \end{cases}$$

Con questa trasformazione si ottiene

$$|J(z,\theta)| = \begin{vmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -z\, sen\,\theta & z\cos\theta \end{vmatrix} = z \qquad \begin{cases} 0 \le z \le +\infty \\ -\pi \le \theta \le \pi \end{cases}$$

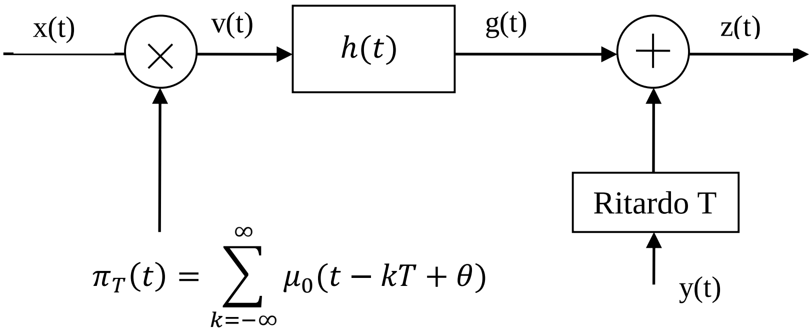
Da cui

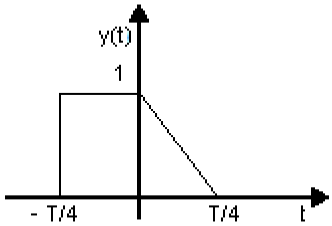
$$p_{z,\Delta}(z,\theta) = p_{X_2X_1}(z\cos\theta\, ; z\, sen\,\theta) \cdot z$$

E infine

$$p_z(z) = \int_\theta p_{z,\Delta}(z,\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi\, {\sigma_x}^2} z e^{-\frac{z^2}{2{\sigma_x}^2}} d\theta \qquad \rightarrow \quad RAYLEIGH$$

ESERCIZIO 20 (ESAME DEL 17/04/00)

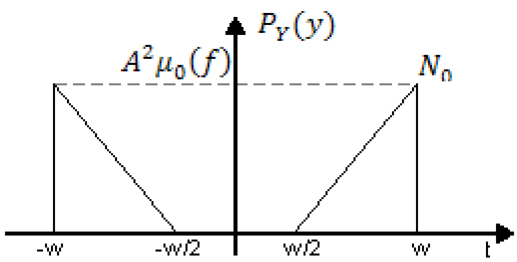




Dove x(t) sia la realizzazione di un processo X(t) stazionario ed ergodico avente gerarchia di ordine 1 pari a $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 4}} e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}$ e spettro di densità di potenza

$$P_{xx}(f) = N_0 + 4\mu_0(f)$$

Sia θ una realizzazione di una v.a. Θ distribuita uniformemente in $(-T/2\,;T/2]$. Sia inoltre y(t) una realizzazione di un processo Y(t) stazionario ergodico gaussiano con spettro di potenza



Siano X(t), Y(t), θ statisticamente indipendenti.

Si calcoli il momento misto di ordine (1,1) di z(t)

SVOLGIMENTO:

z(t)=g(t)+y(t-T)

$$m_z{}^{(1,1)} = \widetilde{z_1^2 z_2^2}^{Z_1Z_2;t_1;t_2} = \widetilde{z_1^2 z_2^2}^{Z_1Z_2;\tau} = \overline{z(t)z(t+\tau)}^t =$$

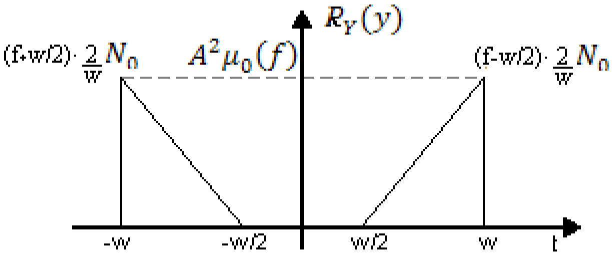
$$= \overline{[g(t)+y(t-T)][g(t+\tau)y(t+\tau-T)]}^t =$$

$$= \overline{g(t)g(t+\tau)}^t + \overline{g(t)y(t+\tau-T)}^t + \overline{g(t+\tau)y(t-T)}^t + \overline{y(t-T)y(t+\tau-T)}^t =$$

$$= m_g{}^{(1,1)}(\tau) + m_y{}^{(1,1)}(\tau) + 2m_g m_y = p_{gg}(\tau) + p_{yy}(\tau) + 2m_g m_y$$

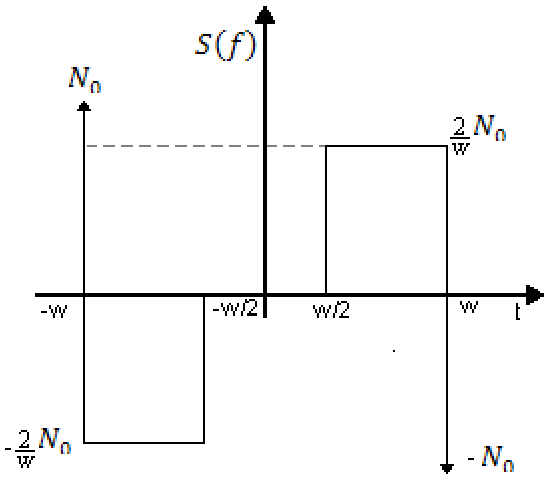
$m_y = \overline{y(t)}^t = \tilde{y}^Y = A$

$p_{yy}(\tau) = \overline{y(t)y(t+\tau)}^t = \mathcal{F}^{-1}\{P_y(f)\} = A^2 + \mathcal{F}^{-1}\{R_y(f)\}$



Si calcoli la funzione di autocorrelazione di Y(t)

$\mathcal{F}^{-1}\{R_y(f)\} = \frac{1}{-j2\pi t}\,\mathcal{F}^{-1}\{S(f)\}$



$$\mathcal{F}^{-1}\{S(f)\} = N_0 e^{-j2\pi wt} - N_0 e^{j2\pi wt} - \frac{2}{w}N_0\frac{w}{2}\ sinc\left(\pi\frac{w}{2}t\right)e^{-j2\pi\frac{3}{4}wt}$$

$$+\frac{2}{w}N_0\frac{w}{2}\ sinc\left(\pi\frac{w}{2}t\right)e^{+j2\pi\frac{3}{4}wt} =$$

$$= N_0\left[-e^{j2\pi wt} + e^{-j2\pi wt}\right] + N_0\left[e^{+j2\pi\frac{3}{4}wt} - e^{-j2\pi\frac{3}{4}wt}\right] - sinc\left(\pi\frac{w}{2}t\right) =$$

$$= -2jN_0 sen(2\pi wt) + 2jN_0 sinc\left(\pi\frac{w}{2}t\right)sen\left(\pi\frac{3}{2}\ wt\right)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{R_y(f)\} = \frac{N_0}{\pi t}sen(2\pi wt) - \frac{1}{\pi t}N_0 sinc\left(\pi\frac{w}{2}t\right)sen\left(\pi\frac{3}{2}\ wt\right) =$$

$$= N_0 w\left[2sinc(2\pi wt) - \frac{3}{2}sinc\left(\pi\frac{w}{2}t\right)sinc\left(\pi\frac{3}{2}\ wt\right)\right]$$

Da cui

$$p_{yy}(\tau) = A^2 + N_0 w\left[2sinc(2\pi wt) - \frac{3}{2}sinc\left(\pi\frac{w}{2}t\right)sinc\left(\pi\frac{3}{2}\ wt\right)\right]$$

$$m_g = m_v \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt \qquad ; \qquad m_v = m_\pi \cdot m_x = 2 \cdot \frac{1}{T} = \frac{2}{T}$$

$$m_g = \frac{2}{T} \cdot \frac{3}{8} T = \frac{3}{4}$$

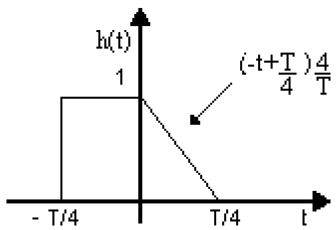
$$p_{gg}(\tau) = \frac{N_0}{T} e_{hh}(\tau) + \frac{4}{T} \sum_k e_{hh}(\tau - kT) \qquad con \quad e_{hh}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t)h(t+\tau)dt$$

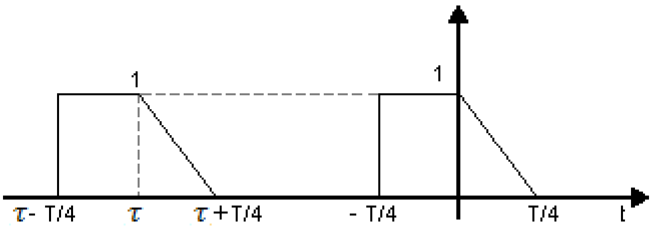
Da cui

$$m_z{}^{(1,1)}(\tau) = \left\{ \frac{N_0}{T} e_{hh}(\tau) + \frac{4}{T} \sum_k e_{hh}(\tau - kT) \right\} +$$

$$+ \left\{ A^2 + N_0 w \left[2sinc(2\pi wt) - \frac{3}{2} sinc\left(\pi \frac{w}{2} t\right) sinc\left(\pi \frac{3}{2} wt\right) \right] \right\} + \frac{3}{2} A$$

$$e_{hh}(\tau) = h(\tau) \circledast h(\tau) = h^*(-\tau) * h(\tau) = h(-\tau) * h(\tau)$$





1) $per\ |\tau| > T/2 \qquad e_{hh}(\tau) = 0$

2) $per \quad -\frac{T}{2} < \tau < -\frac{T}{4}$

$$e_{hh}(\tau) = \int_{-T/4}^{\tau+T/4} 1 \left(-t + \tau + \frac{T}{4}\right) \frac{4}{T} dt = \frac{4}{T}\left(\tau + \frac{T}{4}\right)\left(\tau + \frac{T}{2}\right) - \int_{-T/4}^{\tau+T/4} \frac{4}{T} t dt =$$

$$= \frac{4}{T}\left[\tau^2 + \frac{T}{2}\tau + \frac{T}{4}\tau + \frac{T^2}{8} - \frac{\tau^2}{2} - \frac{T^2}{32} - \frac{T}{4}\tau + \frac{T^2}{32}\right] = \frac{4}{T}\left[\frac{\tau^2}{2} + \frac{T}{2}\tau + \frac{T^2}{8}\right]$$

3) $per \quad -\frac{T}{4} < \tau < 0$

$$e_{hh}(\tau) = \int_{-T/4}^{\tau} dt + \int_{\tau}^{0} \frac{4}{T}\left(-t + \tau + \frac{T}{4}\right) dt + \int_{0}^{\tau+T/4} \frac{4}{T}\left(-t + \frac{T}{4}\right)\frac{4}{T}\left(-t + \tau + \frac{T}{4}\right) dt =$$

$$= \tau + \frac{T}{4} + \frac{4}{T}\left[\left(t + \frac{T}{4}\right)(-\tau) - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_\tau^0\right] + \frac{16}{T^2} \int_0^{\tau+T/4} \left(t^2 - t\tau - \frac{T}{4}t - \frac{T}{4}t + \frac{T}{4}\tau + \frac{T^2}{16}\right) dt =$$

$$= \tau + \frac{T}{4} - \frac{4}{T}\tau^2 - \tau + \frac{2}{T}\tau^2 + \frac{16}{T^2}\left[\frac{1}{3}\tau^3 + \frac{1}{3}\frac{T^3}{64} + \tau^2\frac{T}{4} + \tau\frac{T^2}{16} - \left(\tau + \frac{T}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\tau^2 + \frac{T^2}{32} + \frac{T}{4}\tau\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{T}{4}\tau + \frac{T^2}{16}\right)\left(\tau + \frac{T}{4}\right) = \right.$$

$$= -\frac{2\tau^2}{T} + \frac{T}{4} + \frac{16}{T^2}\left[-\frac{1}{6}\tau^3 + \tau^2\left(\frac{T}{4} - \frac{T}{4} - \frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) + \tau\left(\frac{T^2}{16} - \frac{T^2}{32} - \frac{T^2}{8} + \frac{T^2}{16} + \frac{T^2}{16}\right) + \left(\frac{T^3}{3\cdot 64} - \frac{T^3}{64} + \frac{T^3}{64}\right)\right]$$

$$= \frac{16}{T^2}\left[-\frac{\tau^3}{6} - \tau^2\frac{T}{8} + \tau\frac{T^2}{32} + \frac{T^3}{48}\right]$$

4) $per \quad 0 < \tau < \frac{T}{4}$

$$e_{hh}(\tau) = \int_{\tau-\frac{T}{4}}^{0} dt + \int_{0}^{\tau}\left(-t + \frac{T}{4}\right)\frac{4}{T}dt + \int_{\tau}^{\frac{T}{4}}\frac{16}{T^2}\left(-t + \frac{T}{4}\right)\left(-t + \tau + \frac{T}{4}\right)dt =$$

$$= -\tau + \frac{T}{4} + \frac{4}{T}\left(\frac{T}{4}\tau - \frac{1}{2}\tau^2\right) + \frac{16}{T^2}\int_{\tau}^{\frac{T}{4}} t^2 - t\left(\tau + \frac{T}{2}\right) + \frac{T}{4}\tau + \frac{T^2}{16}dt$$

$$= \frac{-2\tau^2}{T} + \frac{T}{4} + \frac{16}{T^2}\left[\frac{1}{3}\frac{T^3}{64} - \frac{1}{3}\tau^3 - \left(\tau + \frac{T}{2}\right)\left(\frac{T^2}{32} - \frac{\tau^2}{2}\right) + \left(\frac{T}{4}\tau + \frac{T^2}{16}\right)\left(\frac{T}{4} - \tau\right)\right] =$$

$$= \frac{16}{T^2}\left[\frac{\tau^3}{6} + \tau^2\left(-\frac{T}{8} + \frac{T}{4} - \frac{T}{4}\right) + \tau\left(-\frac{T^2}{32} + \frac{T^2}{16} - \frac{T^2}{16}\right) + \left(\frac{T^3}{64} + \frac{1}{3}\frac{T^3}{64} - \frac{T^3}{64} + \frac{T^3}{64}\right)\right] =$$

$$= \frac{16}{T^2}\left[\frac{\tau^3}{6} - \frac{T}{8}\tau^2 - \frac{T^2}{32}\tau + \frac{T^3}{48}\right]$$

5) $per \quad \frac{T}{4} < \tau < \frac{T}{2}$

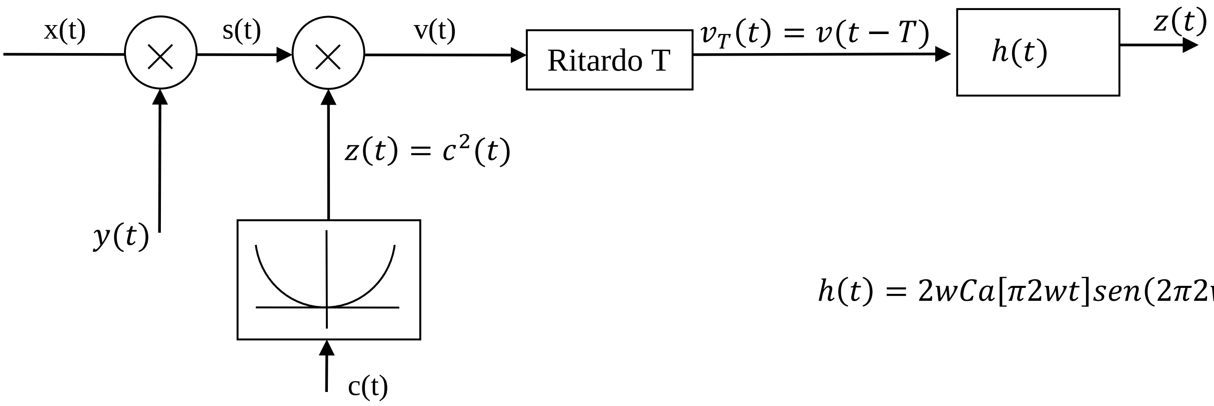
$$e_{hh}(\tau) = \int_{\tau-T/4}^{\frac{T}{4}}\frac{4}{T}\left(-t + \frac{T}{4}\right)dt = \frac{4}{T}\left[\frac{T^2}{16} - \frac{T}{4}\tau + \frac{T^2}{16} - \frac{1}{2}\frac{T^2}{16} + \frac{\tau^2}{2} + \frac{T^2}{32} - \frac{T}{4}\tau\right] = \frac{4}{T}\left[\frac{\tau^2}{2} - \frac{T}{2}\tau + \frac{T^2}{8}\right]$$

Riepilogando

$$e_{hh}(\tau) = \begin{cases} 0 & ;\ |\tau| > \frac{T}{2} \\ \frac{4}{T}\left[\frac{\tau^2}{2} - \frac{T}{2}|\tau| + \frac{T^2}{8}\right] & ;\ \frac{T}{4} < |\tau| < \frac{T}{2} \\ \frac{16}{T^2}\left[\frac{|\tau|^3}{6} - \frac{T}{8}\tau^2 - \frac{T^2}{32}|\tau| + \frac{T^3}{48}\right] & ;\ 0 < |\tau| < \frac{T}{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO 21 (ESAME DEL 19/04/01)

Si consideri lo schema



$$h(t) = 2wCa[\pi 2wt]sen(2\pi 2wt)$$

dove X(t),Y(t)e C(t) sono tre processi aleatori mutuamente statisticamente indipendenti.

Sia C(t) un processo armonico stazionario ed ergodico $c(t) = \cos(2\pi 2wt + \varphi)$

Siano X(t) e Y(t) processi stazionari ergodici con spettro di densità di potenza

$$P_x(f) = rect_w(f) \quad ; \quad P_y(f) = rect_{3w}(f)$$

Ciò posto, si calcoli il momento misto di ordine (1,1) di z(t)

SVOLGIMENTO:

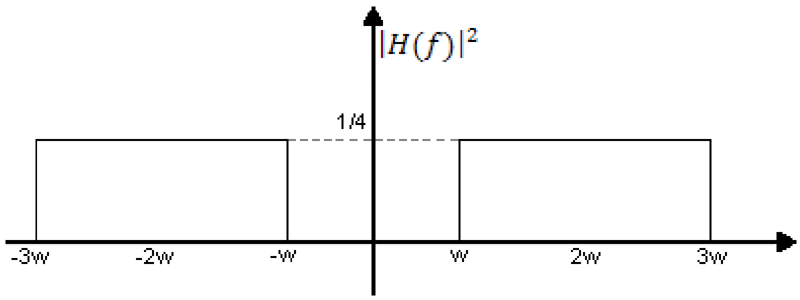
$$m_z^{(1,1)}(\tau) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ergodicità}}}{=} \overline{z(t)z(t+\tau)}^t = p_{zz}(\tau) = p_{v_T v_T}(\tau) * e_{hh}(\tau)$$

Da cui

$$\mathcal{F}\{m_z^{(1,1)}(\tau)\} = P_z(f) = P_{v_T}(f)|H(f)|^2$$

Essendo

$$H(f) = rect_{2w}(f) * \frac{1}{2j}[\mu_0(f-2w) - \mu_0(f+2w)]$$



Si ha poi

$$p_{v_Tv_T}(\tau) = \overline{v(t-T)v(t-T+\tau)}^t = p_{vv}(\tau) = \overline{v(t)v(t+\tau)}^t = \overline{s(t)z(t)s(t+\tau)z(t+\tau)}^t \underset{\text{indipendenza}}{=}$$

$$= \overline{z(t)z(t+\tau)}^t\overline{s(t)s(t+\tau)}^t = p_{ss}(\tau)p_{zz}(\tau) =$$

$$= \overline{x(t)y(t)x(t+\tau)y(t+\tau)}^t \cdot \overline{c^2(t)c^2(t+\tau)}^t = \overline{x(t)x(t+\tau)}^t \cdot \overline{y(t)y(t+\tau)}^t \cdot \overline{c^2(t)c^2(t+\tau)}^t$$

$$p_{v_Tv_T}(\tau) = p_{xx}(\tau)p_{yy}(\tau)m_c{}^{(2,2)}(\tau)\,; \qquad m_c{}^{(2,2)}(\tau) = \widetilde{c_1^2c_2^2}^{C_1C_2;\tau}$$

$$p_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{P_x(f)\} = wCa(\pi w\tau)$$

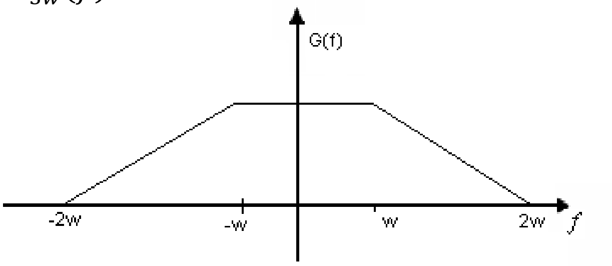
$$p_{yy}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{P_y(f)\} = 3wCa(3\pi w\tau)$$

Ma anche

$$P_{v_T}(f) = \mathcal{F}\{p_{v_Tv_T}(\tau)\} = [P_x(f) * P_y(f)] * \mathcal{F}[\,m_c{}^{(2,2)}(\tau)] =$$

$$= [rect_w(f) * rect_{3w}(f)] * \mathcal{F}[\,m_c{}^{(2,2)}(\tau)] = G(f) * \mathcal{F}[\,m_c{}^{(2,2)}(\tau)]$$

$$G(f) = rect_w(f) * rect_{3w}(f)$$



Si ha poi

$$m_c{}^{(2,2)}(\tau) = \widetilde{c_1^2c_2^2}^{C_1C_2;\tau} = \overline{c^2(t)c^2(t+\tau)}^t = cos^2(2\pi 2wt+\varphi)\widetilde{cos^2(2\pi 2w(t+\tau)+\varphi)}^{\Phi} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} cos^2(2\pi 2wt+\varphi)cos^2(2\pi 2w(t+\tau)+\varphi)d\,\varphi$$

Essendo C(t) ergodico $p_{\Phi}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} rect_{2\pi}(\varphi)$

Perciò

$$m_c{}^{(2,2)}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+cos(2\pi 4wt+2\varphi)}{2} \cdot \frac{1+cos(2\pi 4w(t+\tau)+2\varphi)}{2} d\,\varphi =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [1 + cos(2\pi 4wt+2\varphi) + cos(2\pi 4w(t+\tau)+2\varphi)$$

$$+cos(2\pi 4wt+2\varphi)cos(2\pi 4w(t+\tau)+2\varphi)]d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8\pi}\left\{\int_{\pi}^{-\pi} d\varphi + \int_{\pi}^{-\pi} cos(2\pi 4wt + 2\varphi)d\varphi + \int_{\pi}^{-\pi} cos(2\pi 4w(t+\tau) + 2\varphi)d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_{\pi}^{-\pi} \frac{1}{2}(cos(2\pi 4w(2t + 4\tau) + 4\varphi) + cos(2\pi 4w\tau)d\varphi\right\}$$

essendo $\cos\alpha\cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

Perciò

$$m_c^{(2,2)}(\tau) = \frac{1}{8\pi}\left\{2\pi + 0 + 0 + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\pi 4w\tau)\, d\varphi + 0\right\} =$$

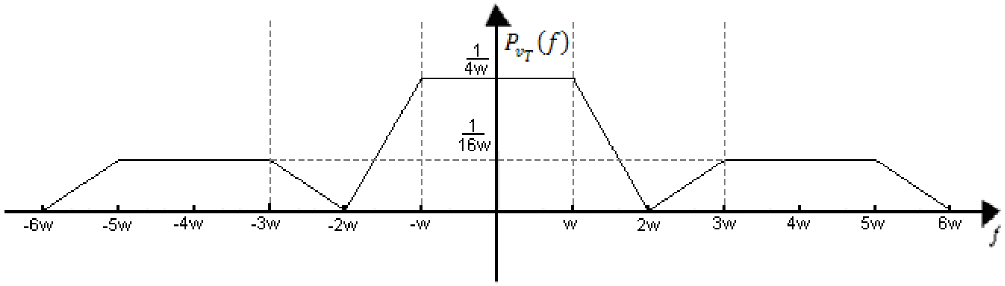
$$= \frac{1}{8\pi}\{2\pi + \pi\cos(2\pi 4w\tau)\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cos(2\pi 4w\tau)$$

Da cui

$$\mathcal{F}\{\, m_c^{(2,2)}(\tau)\} = \frac{1}{4}\mu_0(f) + \frac{1}{16}[\mu_0(f-4w) + \mu_0(f+4w)]$$

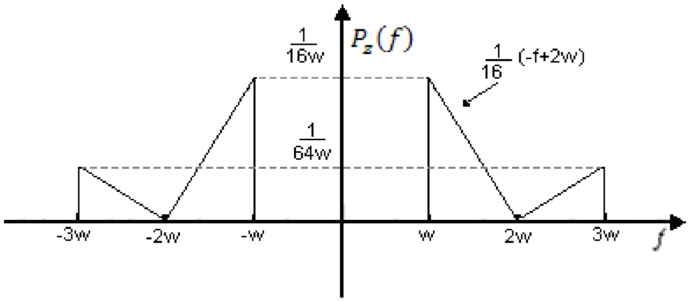
E quindi

$$P_{v_T}(f) = G(f) * \mathcal{F}\left[\, m_c^{(2,2)}(\tau)\right] = \frac{1}{4}G(f) + \frac{1}{16}[G(f-4w) + G(f+4w)]$$



Infine
$P_z(f) = P_{v_T}(f)|H(f)|^2$

Da cui



Perciò

$$m_z^{(1,1)}(\tau) = p_z(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{P_z(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{Z_1(f) + Z_2(f) + Z_3(f) + Z_4(f)\}$$
$$= z_1(t) + z_2(t) + z_3(t) + z_4(t)$$

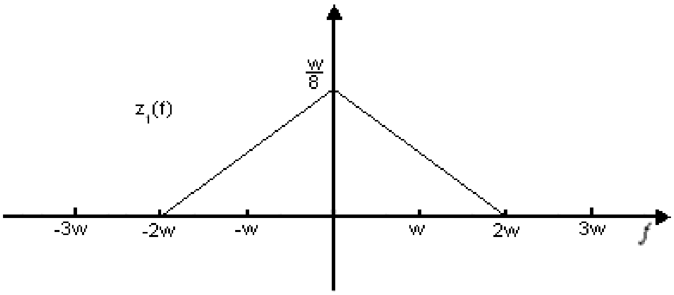
dove

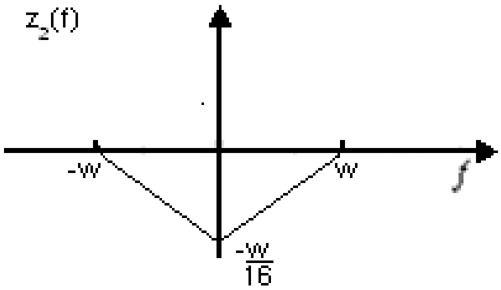
$$Z_1(f) = \frac{w}{8}tri_{2w}(f) = \frac{w}{8}[rect_{2w}(f) * rect_{2w}(f)] \cdot \frac{1}{2w} = \frac{1}{16}[rect_{2w}(f) * rect_{2w}(f)]$$

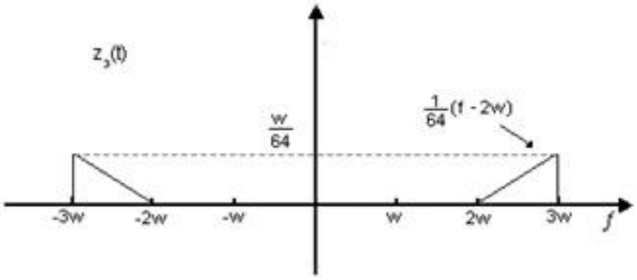
$$Z_2(f) = -\frac{w}{16}tri_w(f) = -\frac{w}{16}[rect_w(f) * rect_w(f)]\frac{1}{w} = -\frac{1}{16}[rect_w(f) * rect_w(f)]$$

$$Z_3(f) = \frac{1}{64}(f - 2w)rect_w\left(f - \frac{5w}{2}\right) - \frac{1}{64}(f + 2w)rect_w\left(f + \frac{5w}{2}\right)$$

$$Z_4\,(f) = -\frac{w}{16}rect_{2w}(f)$$







da cui

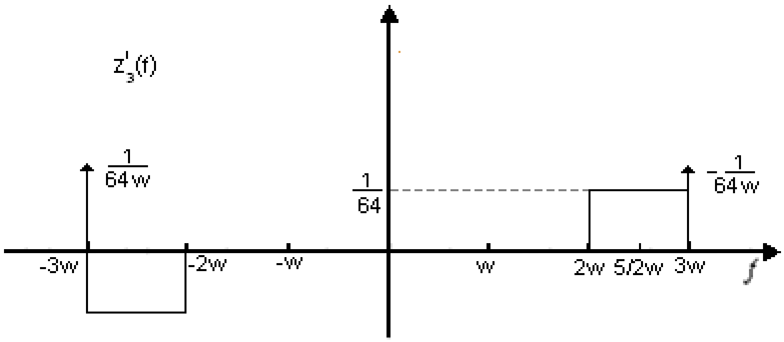
$$z_1(t) = \frac{1}{16}(2w)^2Ca^2(2\pi wt) = \frac{w^2}{4}Ca^2(2\pi wt)$$

$$z_2(t) = -\frac{1}{16}w^2Ca^2(\pi wt)$$

$$z_4(t) = -\frac{w^2}{8}Ca(\pi wt)$$

e ricordando che

$$x(t) = \frac{j}{2\pi t}\mathcal{F}^{-1}\{\frac{dX(f)}{df}\}$$



$$z_3'(f) = \frac{w}{64}[\mu_0(f+3w) - \mu_0(f-3w)] + \frac{1}{64}\left[-rect_w\left(f+\frac{5}{2}w\right) + rect_w\left(f-\frac{5}{2}w\right)\right]$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{z_3'(f)\} = \frac{w}{64}\left\{e^{-j2\pi 3wt} - e^{+j2\pi 3wt} + Ca(\pi wt)e^{+j2\pi\frac{5}{2}wt} - Ca(\pi wt)e^{-j2\pi\frac{5}{2}wt}\right\} =$$

$$= \frac{w}{64}\left\{e^{-j2\pi 3wt} - e^{+j2\pi 3wt} + Ca(\pi wt)\cdot 2jsen\left(2\pi\frac{5}{2}wt\right)\right\} =$$

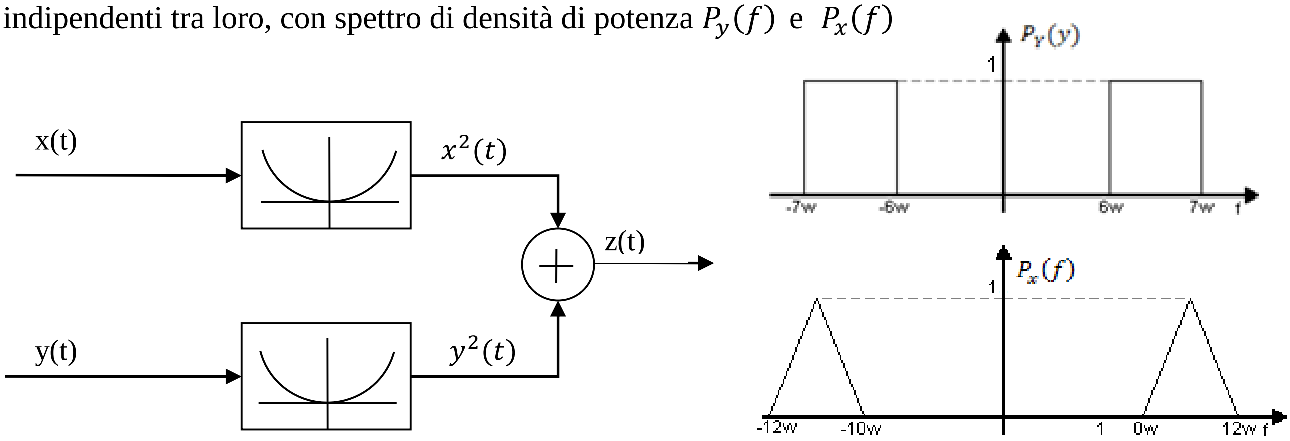
Da cui infine

$$z_3(t) = \frac{j}{2\pi t}\left[-2jsen(2\pi 3wt) + Ca(\pi wt)\cdot 2jsen\left(2\pi\frac{5}{2}wt\right)\right]\frac{w}{64} =$$

$$= \frac{w}{64\pi t}\left[sen(2\pi 3wt) - Ca(\pi wt)sen\left(2\pi\frac{5}{2}wt\right)\right]$$

ESERCIZIO 22 (ESAME DEL 15/01/01)

Si consideri il sistema di figura, dove X(t) e Y(t) sono due processi aleatori Gaussiani, ergodici, indipendenti tra loro, con spettro di densità di potenza $P_y(f)$ e $P_x(f)$



Si calcoli lo spettro di densità di potenza del processo Z(t)

SVOLGIMENTO:

$$P_Z(f) = \mathcal{F}\{p_{zz}(\tau)\}$$

Con $p_{zz}(\tau) = \overline{z(t)z(t+\tau)}^{t} = \widetilde{z_1^2 z_2^2}^{Z_1Z_2;\tau} = \widetilde{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}^{X_1X_2;\tau} =$

$$= \widetilde{x_1^2 x_2^2}^{X_1X_2;\tau} + \widetilde{y_1^2 y_2^2}^{Y_1Y_2;\tau} + \widetilde{x_1^2 y_2^2}^{X_1Y_2;\tau} + \widetilde{y_1^2 x_2^2}^{Y_1X_2;\tau} =$$

$$= {m_x}^{(2,2)}(\tau) + {m_y}^{(2,2)}(\tau) + 2{m_x}^{(2)}{m_y}^{(2)}$$

$$\begin{cases} {m_x}^{(2,2)}(\tau) = E\{x_1^2 x_2^2\} \\ {m_y}^{(2,2)}(\tau) = E\{y_1^2 y_2^2\} \\ {m_x}^{(2)} = E\{x^2\} \\ {m_y}^{(2)} = E\{y^2\} \end{cases} \quad \text{con} \begin{cases} m_x = 2 \\ m_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} P_x = p_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{xx}(f)df = 4 + 2w \\ P_y = 2w \end{cases}$$

Da cui

$$k_x(\tau) = p_{xx}(\tau) - {m_x}^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_x^2 = k_x(0) = P_x - {m_x}^2 = 2w \\ \sigma_y^2 = k_y(0) = P_y - {m_y}^2 = 2w \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_x = 2 \\ \sigma_x^2 = 2w \\ {m_x}^{(2)} = 4 + 2w \end{cases} \qquad \begin{cases} m_y = 0 \\ \sigma_y^2 = 2w \\ {m_y}^{(2)} = 2w \end{cases}$$

$$p_{zz}(\tau) = {m_x}^{(1,1)}(\tau) + {m_y}^{(1,1)}(\tau) + 2{m_x}^{(2)}{m_y}^{(2)}$$

Per calcolare i termini $m_x{}^{(1,1)}(\tau)$ e $m_y{}^{(1,1)}(\tau)$, consideriamo una generica variabile x gaussiana, con valore atteso m_x e varianza σ_x^2

Si ha:

$$E\{x_1^2 x_2^2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 x_2^2\, p_{x_1x_2}(x_1x_2)dx_1dx_2$$

Con $p_{x_1x_2}(x_1x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}^2\sigma_{x_2}^2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-m_{x_1})^2}{\sigma_{x_1}{}^2} - \frac{2\rho(x_1-m_{x_1})(x_2-m_{x_2})}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} + \frac{(x_2-m_{x_2})^2}{\sigma_{x_2}{}^2}\right]}$

Ma si ha anche

$$E\{x_1^2 x_2^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 p_{x_2/x_1}(x_2/x_1)dx_2\right]p_{x_1}(x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2\cdot m_{x_2/x_1}{}^{(2)}\cdot p_{x_1}(x_1)dx_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2\cdot[\sigma_{x_2/x_1}^2 + m_{x_2/x_1}{}^{(2)}]\cdot p_{x_1}(x_1)dx_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2\cdot\left[\sigma_{x_2}^2(1-\rho^2) + (m_{x_2} + \rho\frac{\sigma_{x_2}}{\sigma_{x_1}}(x_1-m_{x_1})^2)\right]\cdot p_{x_1}(x_1)dx_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot[\sigma_x^2(1-\rho^2) + [m_x + \rho(x-m_x)^2]\ ]\cdot p_x(x)dx =$$

Stazionarietà

$$= [\sigma_x^2(1-\rho^2) + m_x{}^2\ ]\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty} x^2\ p_x(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} x^2[\rho^2(x-m_x)^2 + 2\rho m_x(x-m_x)]p_x(x)dx =$$

$ponendo\ \ s = x - m_x$

$$= [\sigma_x^2(1-\rho^2) + m_x{}^2\ ]m_x{}^2 + \int_{-\infty}^{\infty}(s^2 + m_x{}^2 + 2m_xs)[\rho s^2 + 2\rho m_x s]\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}e^{-\frac{s^2}{2\sigma_x{}^2}}ds\ \ =$$

$$= [\sigma_x^2(1-\rho^2) + m_x{}^2\ ]m_x{}^{(2)} +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty}[\rho^2s^4 + 2\rho m_xs^3 + \rho^2m_x{}^2s^2 + 2\rho m_x{}^3s + 2\rho^2m_xs^3 + 4\rho m_x{}^2s^2]\,p_S(s)ds$$

Per le proprietà delle gaussiane

$$\mu^{(n)} = E\{(x-m_x)^n\} = \begin{cases}0 & n\ dispari\\ 1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)\sigma_x^n & n\ pari\end{cases}$$

Si ha

$$E\{x_1^2x_2^2\} = [\sigma_x^2(1-\rho^2) + {m_x}^2\ ] \cdot [\sigma_x^2 + {m_x}^2] + [3\rho^2\sigma_x^4 + \rho^2{m_x}^2\sigma_x^2 + 4\rho{m_x}^2\sigma_x^2] =$$

$$= \sigma_x^4 - \rho^2\sigma_x^4 + {m_x}^2\sigma_x^2 - \rho^2\sigma_x^2{m_x}^2 + {m_x}^2\sigma_x^2 + {m_x}^4 + 3\rho^2\sigma_x^4 + \rho^2\sigma_x^2{m_x}^2 + 4\rho{m_x}^2\sigma_x^2 =$$

$$= 2\rho^2\sigma_x^4 + 4\rho\sigma_x^2{m_x}^2 + \sigma_x^4 + 2{m_x}^2\sigma_x^2 + {m_x}^4 =$$

$$= 2\left[\frac{{m_x}^{(1,1)}(\tau) - {m_x}^2}{\sigma_x^2}\right]^2 \sigma_x^4 + 4\left[\frac{{m_x}^{(1,1)}(\tau) - {m_x}^2}{\sigma_x^2}\right]\sigma_x^2{m_x}^2 + [\sigma_x^2 + {m_x}^2]^2\ =$$

$$= 2[{m_x}^{(1,1)}(\tau)]^2 + 2{m_x}^4 - 4{m_x}^2{m_x}^{(1,1)}(\tau) + 4{m_x}^2{m_x}^{(1,1)}(\tau) - 4{m_x}^4$$

$$+ [\sigma_x^4 + {m_x}^4 + 2\sigma_x^2{m_x}^2] =$$

$$= 2[{m_x}^{(1,1)}(\tau)]^2 + [\sigma_x^4 + 2\sigma_x^2{m_x}^2 - {m_x}^4]$$

Si ottiene perciò, nel nostro caso

$$\begin{cases} E\{x_1^2x_2^2\} = 2\left[{m_x}^{(1,1)}(\tau)\right]^2 + [\sigma_x^4 + 2\sigma_x^2{m_x}^2 - {m_x}^4] = 2[p_{xx}(\tau)]^2 + [4w^2 + 16w - 16] = 2{p_{xx}}^2(\tau) + 4[w^2 + 4w - 4] \\ E\{y_1^2y_2^2\} = 2\left[p_{yy}(\tau)\right]^2 + [{m_y}^{(2)}]^2 = 2\left[p_{yy}(\tau)\right]^2 + 4w^2 \end{cases}$$

Da cui

$$p_{zz}(\tau) = 2\{{p_{xx}}^2(\tau) + {p_{yy}}^2(\tau)\} + 16w^2 + 32w - 16 = 2\{{p_{xx}}^2(\tau) + {p_{yy}}^2(\tau) + 8(w+1)^2 - 16\}$$

Quindi

$$P_Z(f) = 2[\mathcal{F}\{{p_{xx}}^2(\tau)\} + \mathcal{F}\{{p_{yy}}^2(\tau)\} + [8(w+1)^2 - 16]\mu_0(f)]$$

$$\begin{cases} P_Y(f) = 4\mu_0(f) + tri_w(f) * [\mu_0(f - 11w) + \mu_0(f + 11w)] \\ P_X(f) = rect_w(f) * \left[\mu_0\left(f - \frac{13}{2}w\right) + \mu_0\left(f + \frac{13}{2}w\right)\right] \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{{p_{yy}}^2(\tau)\} = P_Y(f) * P_Y(f) = [rect_w(f) * rect_w(f)] * \left[\mu_0\left(f - \frac{13}{2}w\right) + \mu_0\left(f + \frac{13}{2}w\right)\right] *$$

$$* \left[\mu_0\left(f - \frac{13}{2}w\right) + \mu_0\left(f + \frac{13}{2}w\right)\right] =$$

$$= w\,tri_w(f) * [\mu_0(f - 13w) + \mu_0(f) + \mu_0(f) + \mu_0(f + 13w)] =$$

$$= w\,tri_w(f) * [\mu_0(f - 13w) + \mu_0(f + 13w) + 2\mu_0(f)]$$

E inoltre

$$\mathcal{F}\{{p_{xx}}^2(\tau)\} = P_X(f) * P_X(f) = 16\mu_0(f) + 8tri_w(f) * [\mu_0(f - 11w) + \mu_0(f + 11w)] +$$

$$+[tri_w(f) * tri_w(f)] * [\mu_0(f - 11w) + \mu_0(f + 11w)] *$$

$$* [\mu_0(f - 11w) + \mu_0(f + 11w)] =$$

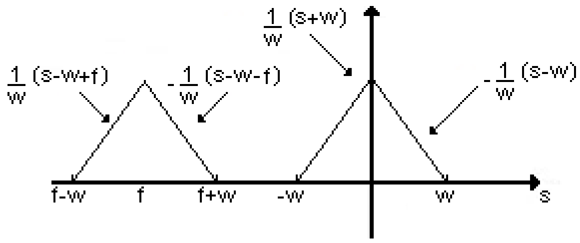
$$= 16\mu_0(f) + 8tri_w(f) * [\mu_0(f - 11w) + \mu_0(f + 11w)] +$$

$$+[tri_w(f) * tri_w(f)] * [2\mu_0(f) + \mu_0(f - 22w) + \mu_0(f + 22w)]$$

Rimane da calcolare la convuluzione $tri_w(f) * tri_w(f)$

$$P_Z(f) = 2\{[8(w+1)^2 - 16 + 16]\mu_0(f) + \left[2w tri_w(f) + 2[tri_w(f) * tri_w(f)]\right]$$
$$+[8tri_w(f)] * [\mu_0(f - 11w) + \mu_0(f + 11w)] +$$
$$+w tri_w(f) * [\mu_0(f - 13w) + \mu_0(s + 13w)] +$$
$$+[tri_w(f) * tri_w(f)] ** [+\mu_0(f - 22w) + \mu_0(f + 22w)]\}$$

Per il calcolo $G(f) = [tri_w(f) * tri_w(f)]$, abbiamo innanzitutto che G(f)=G(-f) , essendo $tri_w(f) \in \mathbb{R}$ e $tri_w(f) = tri_w(-f)$, e quindi risulta



1) $f \le -2w \rightarrow G(f) = 0$

2) $$-2w \le f \le -w \rightarrow G(f) = \int_{-w}^{f+w} -\frac{1}{w^2}(s - f - w)(s + w)ds =$$

$$= \int_{-w}^{f+w} -\frac{1}{w^2}[s^2 + sw - sf - fw - sw - w^2]ds =$$

$$= -\frac{1}{w^2}\left[\frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}fs^2 - (w^2 + wf)s\right]_{-w}^{f+w} =$$

$$= +\frac{1}{6w^2}[f^3 + 6wf^2 + 12w^2 f + 8w^3] = \frac{1}{6w^2}(f + 2w)^3$$

3) $$-w \le f \le 0 \rightarrow G(f) = \int_{-w}^{f} \frac{1}{w^2}(s - f + w)(s + w)ds + \int_{f}^{0} -\frac{1}{w^2}(s - f - w)(s + w)ds +$$

$$+ \int_{0}^{f+w} \frac{1}{w^2}(s - f - w)(s - w)ds =$$

$$= \int_{-w}^{f} \frac{1}{w^2}(s^2 + sw - sf - fw + sw + w^2)ds + \int_{f}^{0} -\frac{1}{w^2}(s^2 + sw - sf - fw - sw - w^2)ds +$$

$$+ \int_{0}^{f+w} \frac{1}{w^2}(s^2 - sw - sf - fw - sw + w^2)ds =$$

$$=\frac{1}{w^2}\left\{\int_{-w}^{f}(s^2+s(2w-f)-fw+w^2)ds-\int_{f}^{0}(s^2-sf-fw-w^2)ds+\int_{0}^{f+w}(s^2-s(2w+f)-fw+w^2)ds\right\}=$$

$$=\frac{1}{w^2}\left\{\left[\frac{1}{3}s^3+\frac{1}{2}s^2(2w-f)+s(-fw+w^2)\right]_{-w}^{f}-\left[\frac{1}{3}s^3-\frac{1}{2}s^2f-s(fw+w^2)\right]_{f}^{0}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{3}s^3-\frac{1}{2}s^2(f+2w)+s(fw+w^2)\right]_{0}^{f+w}\right\}=$$

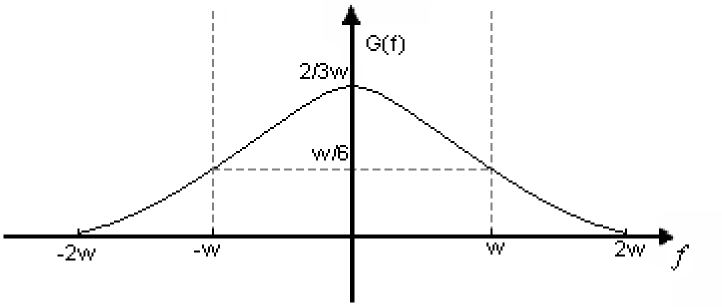
$$=\frac{1}{w^2}\left\{\left[\frac{1}{3}f^3+\frac{1}{3}w^3-\frac{1}{2}f^3\right]+\left[\frac{1}{3}f^3-\frac{1}{2}f^3\right]+\left[\frac{1}{3}f^3+\frac{1}{3}w^3-\frac{1}{2}f^3-wf^2\right]\right\}=\frac{1}{w^2}\left\{\left[-\frac{1}{2}f^3+\frac{2}{3}w^3-wf^2\right]\right\}$$

$$4)0\le f\le w\ \rightarrow\ G(f)=G(-f)=\frac{1}{w^2}\left\{\left[+\frac{1}{2}f^3+\frac{2}{3}w^3-wf^2\right]\right\}$$

$$5)w\le f\le 2w\ \rightarrow\ G(f)=G(-f)=\frac{1}{6w^2}(-f+2w)^3$$

Perciò

$$G(f)=[tri_w(f)*tri_w(f)]=\begin{cases}\dfrac{1}{6w^2}(-|f|+2w)^3 & ;\ w\le [f]\le 2w\\ \dfrac{1}{w^2}\left\{\left[+\dfrac{1}{2}|f|^3+\dfrac{2}{3}w^3+wf^2\right]\right\} & ;\quad 0\le |f|\le w\end{cases}$$



ESERCIZIO 23 (ESAME DEL 15/01/2001)

Siano $\begin{cases} x(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} a_K rect_T(t - KT - \theta) \\ y(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} b_K h(t - KT - \theta) \end{cases}$ con $h(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) & -T/2 \le t \ge T/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ due realizzazioni di due onde PAM a variabili indipendenti, stazionarie ed ergodiche. $\{A_K\}$e $\{B_K\}$mutuamente statisticamente indipendenti, con funzione di densità di probabilità:

$$\begin{cases} p_{A_k}\{a_k\} = \frac{a_k}{2} rect_2(a_k - 1) \\ p_{B_k}\{b_k\} = \frac{1}{2} rect_2(b_k) \end{cases}$$

Posto ciò, si calcoli il momento misto di ordine (1,1) del processo $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

SVOLGIMENTO:

$$m_z^{(1,1)}(\tau) = p_{zz}(\tau) = \overline{z(t)z(t+\tau)}^t = \overline{\left[x(t) + y(t)\right]\left[x(t+\tau) + y(t+\tau)\right]}^t =$$

$$\overline{x(t)x(t+\tau) + x(t)y(t+\tau) + x(t+\tau)y(t) + y(t)y(t+\tau)}^t = p_{xx}(\tau) + p_{yy}(\tau) + 2m_x m_y$$

$$\begin{cases} m_x = \frac{m_a}{T}\int_{-\infty}^{\infty} rect_T(t)\,dt = \frac{m_a}{T}\left[1 \cdot T\right] = m_a \\ m_y = \frac{m_b}{T}\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = \frac{m_b}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)dt = \frac{m_b}{T}\left[\frac{T}{\pi} rect\left(\frac{T}{\pi}t\right)\right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{m_b}{T}\left[1 - (-1)\right] = \frac{2m_b}{T} \end{cases}$$

Dove:

$$\text{A} \rightarrow \begin{cases} m_a = \int_{-\infty}^{\infty} a_k p_{A_k}(a)\,da_k = \int_{-\infty}^{\infty} a_k \frac{a_k}{2} rect_2(a_k - 1)\,da_k = \int_0^2 \frac{a_k^2}{2} da_k = \left[\frac{a_k^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3} \\ \sigma_a^2 = \mu_a^{(2)} - \mu_a^2 = \int_0^2 \frac{a_k^2}{3} da_k - \frac{16}{9} = \left[\frac{a_k^4}{8}\right]_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \end{cases}$$

$$\text{B} \rightarrow \begin{cases} m_b = \int_{-\infty}^{\infty} b_k p_{B_k}(b_k)\,db_k = \int_{-\infty}^{\infty} b_k \frac{b_k}{2} rect_2(b_k)\,db_k = \int_{-1}^{1} \frac{b_k}{2} db_k = 0 \\ \sigma_b^2 = m_b^{(2)} - m_b^2 = \int_{-1}^{1} \frac{b_k^2}{2} db_k = \int_0^1 b_k^2 db_k = \left[\frac{b_k^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Perciò:

$$m_z^{(1,1)}(\tau) = p_{xx}(\tau) + p_{yy}(\tau) + 2\left[\frac{4}{3}\right]\left[\frac{2}{4}\cdot 0\right] = p_{xx}(\tau) + p_{yy}(\tau)$$

Nel caso di una onda PAM si ha:

$$p_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{p_{aa}(kT)}{T} e_{yy}\left(\tau - kT\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\left[K_a(kT) + \mu_a^2\right]}{T} e_{yy}\left(\tau - kT\right) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{K_a(kT)}{T} e_{yy}\left(\tau - kT\right) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{m_a^2}{T} e_{yy}\left(\tau - kT\right)$$

Se le variabili aleatorie risultano essere statisticamente indipendenti, come assunto per ipotesi, si ha:

$K_a(kT) = \begin{cases} 0 & ; k \neq 0 \\ \sigma_a^2 & ; k = 0 \end{cases}$, essendo per $k \neq 0$: $K_a\left(kT\right) = 0$.

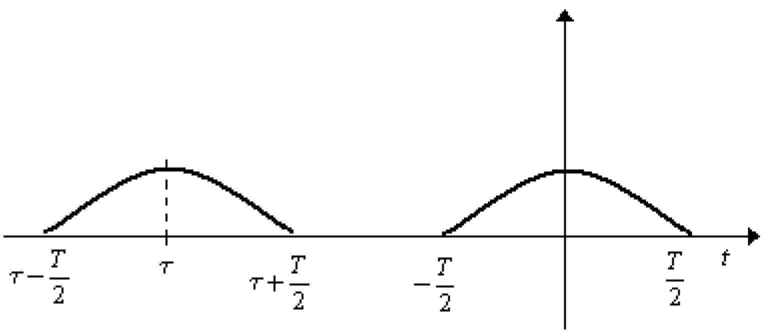
Quindi $p_{xx}(\tau) = \dfrac{m_a^2}{T} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} e_{yy}\left(\tau - kT\right) + \dfrac{\sigma_a^2}{T} e_{yy}\left(\tau\right)$da cui, estendendolo al caso in esame, si ha:

$$\begin{cases} p_{xx}(\tau) = \dfrac{2}{9T} e_{rr}(\tau) + \dfrac{16}{9T} \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} e_{rr}(\tau - kT) \\ p_{yy}(\tau) = \dfrac{1}{3\pi} e_{gg}(\tau) \end{cases}$$

dove :

$$e_{rr}(\tau) = rect_T(t) \otimes rect_T(t) = \left[rect_T^*(-t)\right] * rect_T(t) = rect_T(t) * rect_T(t) = T \cdot tri_T(t)$$

$$e_{gg}(\tau) = \left[\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) rect_T(\tau)\right] \otimes \left[\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) rect_T(\tau)\right] = \left[\cos\left(-\frac{\pi}{T}\tau\right) rect_T(-\tau)\right]^* * \left[\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) rect_T(\tau)\right]$$
$$= \left[\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) rect_T(\tau)\right] * \left[\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right) rect_T(\tau)\right]$$



Inoltre:

$$e_{gg}(\tau)=\begin{cases}0 \quad ; \ |\tau|>T \\ \displaystyle\int_{-T/2}^{\tau+T/2}\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\cos\left[\frac{\pi}{T}(t-\tau)\right]dt=\int_{-T/2}^{\tau+T/2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)+\cos\left[\frac{\pi}{T}(2t-\tau)\right]}{2}dt \quad ; \ -T<\tau<0 \\ \displaystyle\int_{\tau-T/2}^{T/2}\cos\left(\frac{\pi}{T}t\right)\cos\left[\frac{\pi}{T}(t-\tau)\right]dt=\int_{\tau-T/2}^{T/2}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)+\cos\left[\frac{\pi}{T}(2t-\tau)\right]}{2}dt \quad ; \ 0<\tau<T\end{cases}$$

Ovvero:

$$e_{gg}(\tau)=\begin{cases}0 \quad ; \ |\tau|>T \\ \displaystyle\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{T}{2\pi}sen\left[\frac{\pi}{T}(2t-\tau)\right]\right]_{-T/2}^{\tau+T/2}+\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\cdot(\tau+T)\right\}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)}{2}\cdot(\tau+T)-\frac{T\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)}{2\pi}; \\ \qquad -T<\tau<0 \\ \displaystyle\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{T}{2\pi}sen\left[\frac{\pi}{T}(2t-\tau)\right]\right]_{\tau-T/2}^{T/2}+\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\cdot(T-\tau)\right\}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)}{2}\cdot(T-\tau)+\frac{T\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)}{2\pi}; \\ \qquad 0<\tau<T\end{cases}$$

Compattando il tutto:

$$e_{gg}(\tau)=\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\cdot(T-|\tau|)+\frac{T}{2\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{T}|\tau|\right)\right]rect_{2T}(\tau)$$

Concludendo:

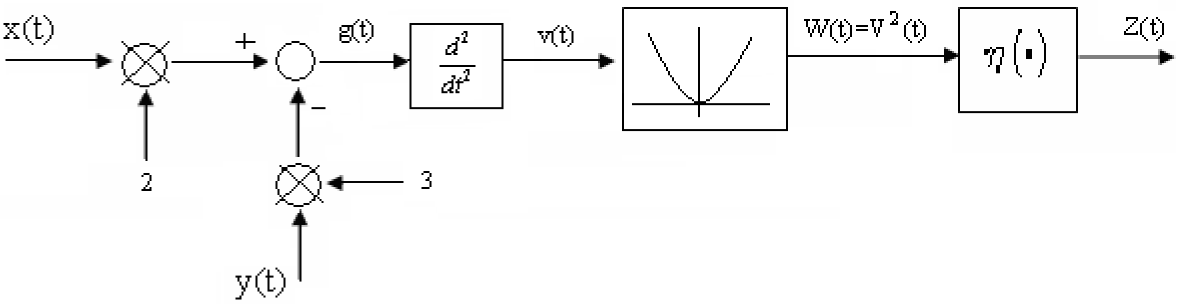
$$m_z^{(1,1)}(\tau)=p_{zz}(\tau)=\frac{2}{9T}\cdot T\cdot tri_T(\tau)+\frac{16}{9T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}T\cdot tri_T(\tau-kT)+$$
$$\frac{1}{3T}\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)\cdot(T-|\tau|)+\frac{T}{2\pi}\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{T}|\tau|\right)\right]rect_{2T}(\tau)$$

ESERCIZIO 24 (ESAME DEL 18/06/2001)

Si considerino due processi X(t) e Y(t) gaussiani, mutuamente statisticamente indipendenti a valore atteso nullo e funzione di autocorrelazione paria a:

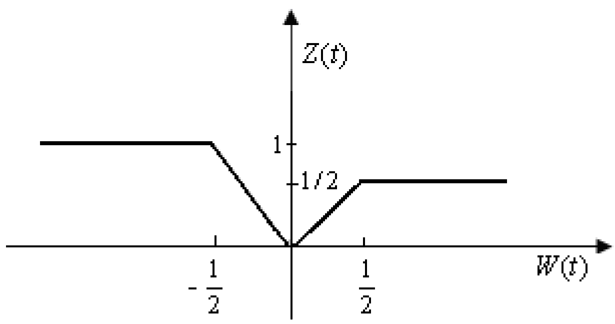
$$p_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 Ca(\pi w \tau)$$
$$p_{yy}(\tau) = \sigma_y^2 Ca(\pi w \tau)$$

Con riferimento allo schema di Figura:



Si calcoli la gerarchia di ordine 1 di Z(t) essendo $\eta(\cdot)$ la non linearità istantanea, definita come:

$Z(t) = \eta\left[W(t)\right]$



SVOLGIMENTO:

Per ottenere la $p_Z(z)$ si deve prima ottenere la $p_W(w)$, con $W(t) = V^2(t)$. Si avrà quindi $W = V^2 \rightarrow V = \pm\sqrt{W}$, da cui:

$$p_W(w) = \begin{cases} 0 \\ p_V\left[-\sqrt{w}\right] \cdot \left|\dfrac{1}{2\sqrt{w}}\right| + p_V\left[\sqrt{w}\right] \cdot \left|\dfrac{1}{2\sqrt{w}}\right| \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 & ; w \leq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{w}}\left[p_V\left[-\sqrt{w}\right] + p_V\left[\sqrt{w}\right]\right] & ; w > 0 \end{cases}$$

Il processo $V(t) = \frac{d^2}{dt^2}G(t)$; $G(t) = 2X(t) - 3Y(t)$ è un processo Gaussiano essendo tramite combinazione lineare di processi Gaussiani. In particolare la v.a. G è Gaussiana con valore atteso e varianza seguenti

$$G:\ N\left(m_g;\sigma_g^2\right);\quad \left\{\begin{array}{l} m_g = 2m_x + 3m_y = 0 \\ \sigma^2 = \sum_{i=x,y} a_i^2\sigma_i^2 = 4\sigma_x^2 + 9\sigma_y^2 \end{array}\right\}$$

Inoltre, essendo $g(t) = 2x(t) - 3y(t)$ si ha:

$$p_{gg}(\tau) = \overline{g(t)g(t+\tau)}^t = \overline{\left[2x(t) - 3y(t)\right]\left[2x(t+\tau) - 3y(t+\tau)\right]}^t$$

$$= 4\overline{x(t)x(t+\tau)}^t + 9\overline{y(t)y(t+\tau)}^t - 6\overline{x(t)y(t+\tau)}^t - 6\overline{y(t)x(t+\tau)}^t = 4p_{xx}(\tau) + 9p_{yy}(\tau) - 12m_x m_y$$

Poiché $m_x = m_y = 0$, si ha che $p_{gg}(\tau) = 4p_{xx}(\tau) + 9p_{yy}(\tau) = \left[4\sigma_x^2 + 9\sigma_y^2\right]Ca\left(\pi w\tau\right) = \sigma_y^2 Ca\left(\pi w\tau\right)$.

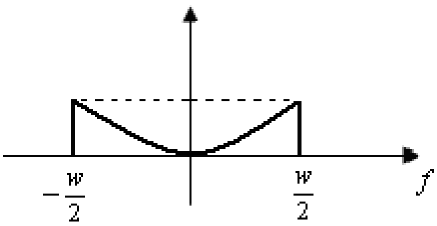
Essendo G(t) a valore atteso nullo anche il processo V(t) sarà a valore atteso nullo essendo

$$m_v = m_g\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = m_g H\left(0\right) = 0,$$

$$p_{vv}(\tau) = p_{gg}(\tau) * e_{hh}(\tau) = \rightarrow P_{vv}(f) = P_{gg}(f)\left|H(f)\right|^2$$

$$P_{vv}(f) = P_{gg}(f)\left|H(f)\right|^2 \quad ; \quad \left\{\begin{array}{l} P_{gg}(f) = \Im\left\{\sigma_y^2 Ca\left(\pi w\tau\right)\right\} = \sigma_y^2\cdot\frac{1}{w}rect_w(f) \\ \left|H(f)\right|^2 = 16\pi^4 f^4 \end{array}\right\}$$

$$P_{vv}(f) = \frac{16\pi^2}{w}\sigma_g^2\cdot f^4 rect_w(f)$$



Da cui:

$$\sigma_v^2 = m_v^{(2)} - m_v^2 = m_v^{(2)} = P_{vv}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{vv}(f)\,df = \frac{16\pi^2}{W}\sigma_g^2\cdot 2\int_0^{W/2} f^4\,df = \frac{32\pi^4}{W}\sigma_g^2\left[\frac{1}{5}f^5\right]_0^{W/2} = \frac{\pi^4}{5}W^4\sigma_g^2$$

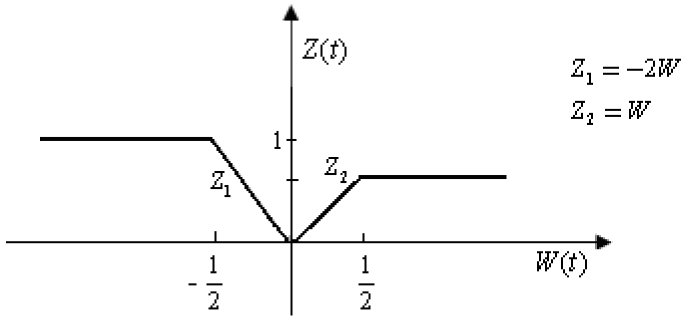
Inoltre:

$$p_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y}}e^{-\frac{v^2}{2n_v^2}}$$

$$p_w(w) = \frac{1}{2\sqrt{w}}\left[\frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma_v}}e^{-\frac{w}{2n_v^2}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi\sigma_v}}e^{-\frac{w}{2n_v^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi w\sigma_v}}e^{-\frac{w}{2n_v^2}} \quad ; \quad w > 0$$

$$p_w(w) = 0 \quad ; \quad w<0$$

Di conseguenza essendo $Z(t) = \eta(W(t))$, con la non linearità riportata in Figura:



si ha che $p_w(w) = \begin{cases} 0 & ;\ w \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi w}\sigma_V} e^{-\frac{w}{2\sigma_V^2}} & ;\ w > 0 \end{cases}$ e $\sigma_V^2 = \frac{\pi^4}{5} W^4 \left(4\sigma_x^2 + 9\sigma_y^2\right)$.

Da cui:

$$p_Z(z) = \begin{cases} 0 & ; \quad (z<0)\cup(z>1) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi z}\sigma_V} e^{-\frac{z}{2\sigma_V^2}} \cdot |1| = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}\sigma_V} e^{-\frac{z}{2\sigma_V^2}} & ; \quad 0< z > 1/2 \\ \left[\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi w}\sigma_V} e^{-\frac{w}{2\sigma_V^2}} \, dW\right] \mu_0(z-1/2) & ; \quad z=1/2 \end{cases}$$

Per quanto riguarda il valore z = 1/2, si ha $p_Z(z)|_{z=1/2} = \int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi w}\sigma_V} e^{-\frac{w}{2\sigma_V^2}} \, dw$.

Effettuando un cambiamento di variabile si ottiene

$$p_Z(z)|_{z=1/2} = \int_{1/\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma_V} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_V^2}} \, 2t \, dt = \int_{1/\sqrt{2}}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_V} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_V^2}} \, dt .$$

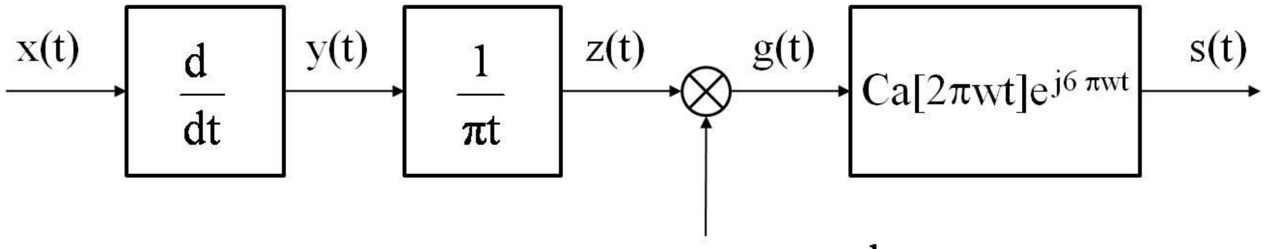
Ponendo $s = \frac{t}{\sqrt{2} s_V}$ l'espressione diventa $p_Z(z)|_{z=1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_V} \int_{1/2\sigma_V}^{+\infty} e^{-s^2} \sqrt{2}\sigma_V \, ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1/2\sigma_V}^{+\infty} e^{-s^2} \, ds$.

Ricordando la definizione analitica della funzione $erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 - erfc(x)$ per x >0, la nostra espressione diviene $p_Z(z) = erfc\left(\frac{1}{2\sigma_V}\right)$.

Quindi $p_Z(z) = \begin{cases} 0 & ;\ (z<0) \cup (z>1) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi z}\,\sigma_V} e^{-\frac{z}{2\sigma_V^2}} & ;\quad 0< z > 1/2 \\ erfc\left(\frac{1}{2\sigma_V}\right)\mu_0\left(z - 1/2\right) & ;\ z=1/2 \end{cases}$ con $\sigma_V^2 = \frac{(\pi W)^4}{5}\sigma_g^2 = \frac{(\pi W)^4}{5}\left(4\sigma_x^2 + 9\sigma_y^2\right)$.

ESERCIZIO 25

Con riferimento allo schema



$$\Pi_{\frac{1}{4w}}(t)=\sum_k \mu_0\left(t-\frac{k}{4w}\right)$$

dove $x(t)=\left[Ca\left(2\pi wt\right)\right]^2$, si calcoli

1. l'energia E_s di s(t)
2. le componenti analogiche di bassa frequenza di s(t) rispetto a $f_0=3w$

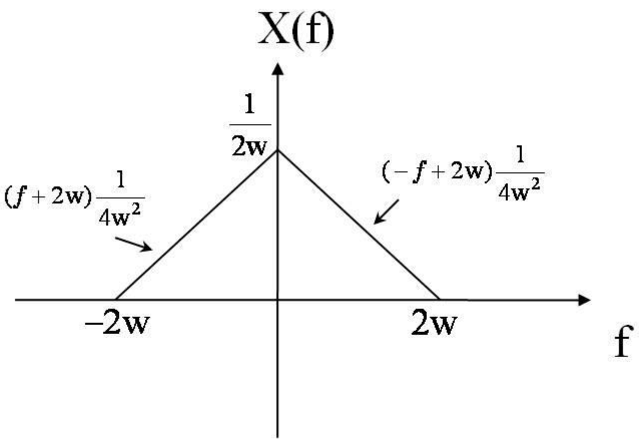
SVOLGIMENTO:

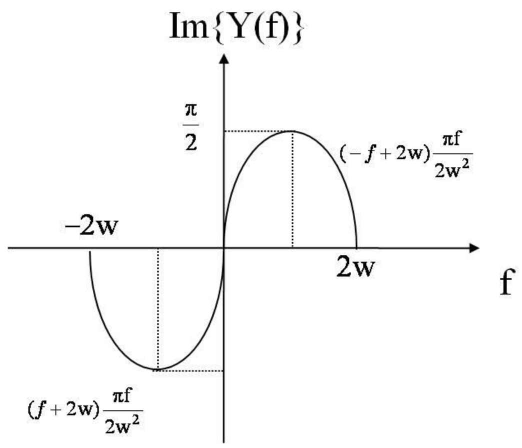
La trasformata di Fourier del segnale x(t) è data da:

$$X(f)=TF\left\{\left[Ca\left(2\pi wt\right)\right]^2\right\}=\frac{1}{2w}tri_{2w}(f)$$

da cui si ottiene lo spettro di y(t) attraverso il passaggio per il filtro derivatore:

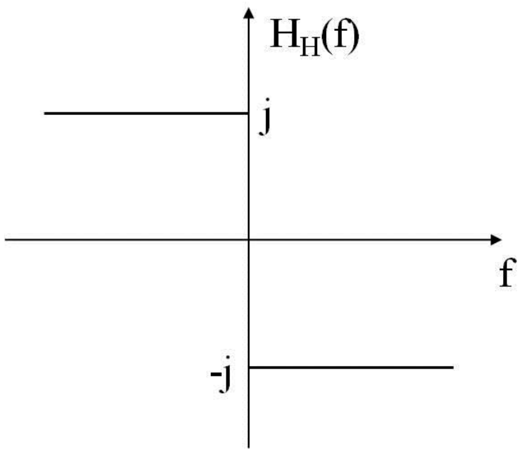
$$Y(f)=j\,\frac{\pi f}{w}tri_{2w}(f)$$

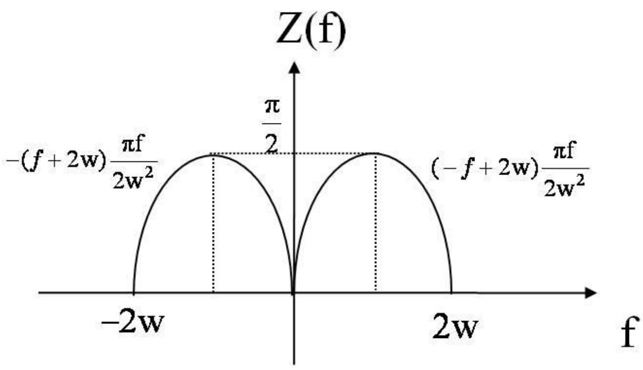




La trasformata di z(t) si ottiene poi come uscita di un filtro di Hilbert avente y(t) in ingresso, ovvero

$$Z(f)=\begin{cases}\dfrac{\pi f}{2w^2}(-f+2w), f>0\\ -\dfrac{\pi f}{2w^2}(f+2w), f<0\end{cases}$$



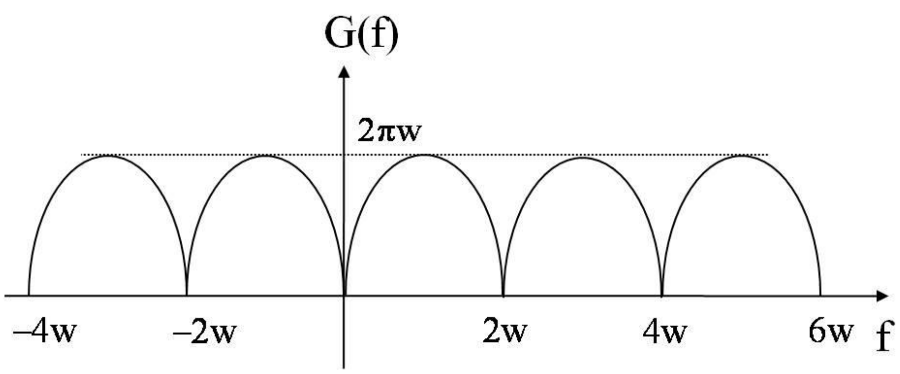


Il segnale z(t) viene successivamente moltiplicato per un treno di impulsi, che ne seleziona i valori presi a passo (1/4w). La trasformata di Fourier del segnale risultante g(t) è data da:

$$G(f)=\mathrm{TF}\,\{g(t)\}=\mathrm{TF}\left\{z(t)\cdot\sum_k \mu_0\left(t-\frac{k}{4w}\right)\right\}=$$

$$=Z(f)*\left[4w\sum_k \mu_0\left(f-k4w\right)\right]=4w\sum_k Z(f-k4w)$$

ovvero:

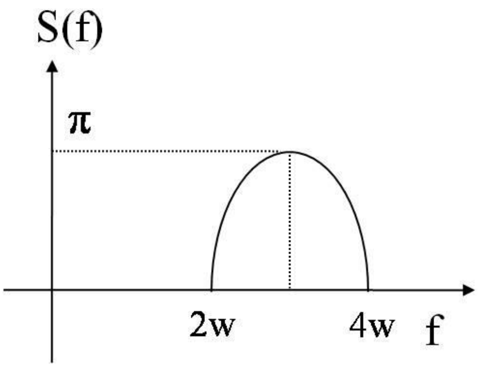


Il filtro attraverso cui transita g(t)ha poi risposta in frequenza

$$\mathrm{TF}\left\{\mathrm{Ca}\left[2\pi wt\right]e^{j6w\pi t}\right\}=\frac{1}{2w}\mathrm{rect}_{2w}\left(f-3w\right)$$

da cui si ottiene che il segnale in uscita s(t) ha componenti in frequenza differenti da zero solo tra 2w e 4w, ovvero:

$$S\left(f\right)=\frac{\pi\left(f-2w\right)}{w^2}\left(-f+4w\right)$$



L'energia del segnale s(t) si può calcolare come:

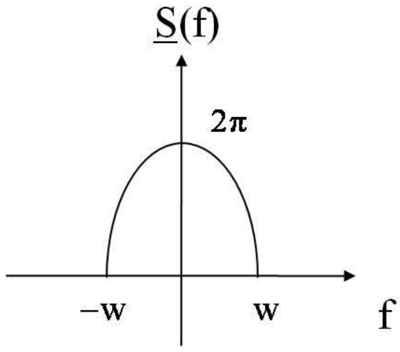
$$E_s=\int_{-\infty}^{\infty}\left|S\left(f\right)\right|^2=\int_{-2w}^{4w}\left|\frac{\pi\left(f-2w\right)}{w^2}\left(-f+4w\right)\right|^2 df=\int_{-w}^{w}\left|\frac{\pi\left(f+w\right)}{w^2}\left(-f+w\right)\right|^2 df=$$

$$=\int_{-w}^{w}\left|\frac{\pi}{w^2}\left(f^2-w^2\right)\right|^2 df=\frac{\pi^2}{w^4}\int_{-w}^{w} f^4-2f^2w^2+w^4 df=$$

$$=\frac{\pi^2}{w^4}\left[\frac{1}{5}f^5-\frac{2}{3}w^2f^3+w^4f\right]_{-w}^{w}=\frac{16}{15}w\pi^2$$

Per il calcolo delle componenti analogiche in bassa frequenza di s(t) rispetto a f_0=3w si ha

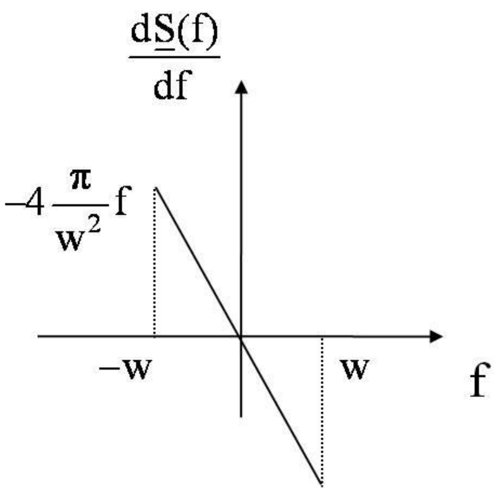
$$\underline{S}\left(f\right)=2S^+\left(f+f_0\right)=-\frac{2\pi}{w^2}\left(f^2-w^2\right)\mathrm{rect}_{2w}\left(f\right);$$

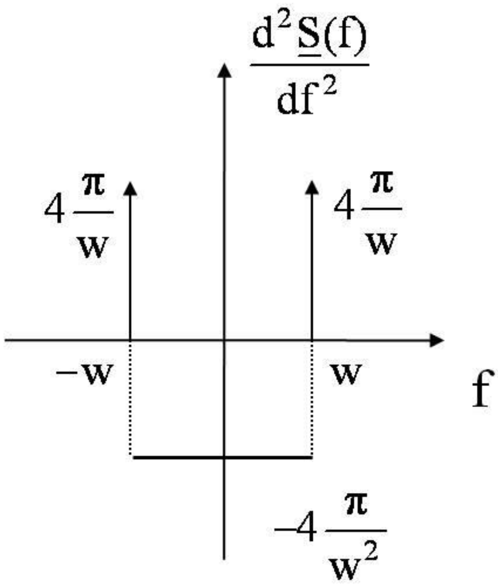


Per calcolare le componenti in fase e in quadratura occorre antitrasformare $\underline{S}(f)$. A tal scopo, si possono considerare le derivate di primo e secondo ordine di $\underline{S}(f)$:

$$\frac{d\underline{S}(f)}{df} = \left(-\frac{4\pi}{w^2} f\right) \mathrm{rect}_{2w}(f)$$

$$\frac{d^2\underline{S}(f)}{df^2} = \left(-\frac{4\pi}{w^2}\right) \mathrm{rect}_{2w}(f) + \frac{4\pi}{w}\mu_0(f+w) + \frac{4\pi}{w}\mu_0(f-w)$$





da cui antitrasformando si ottiene:

$$\underline{s}(t) = s_c(t) + j s_s(t) = \mathrm{TF}^{-1}\{\underline{S}(f)\} = \frac{1}{-j2\pi t} \cdot \frac{1}{-j2\pi t} \cdot \mathrm{TF}^{-1}\left\{\frac{d^2\underline{S}(f)}{df^2}\right\} =$$

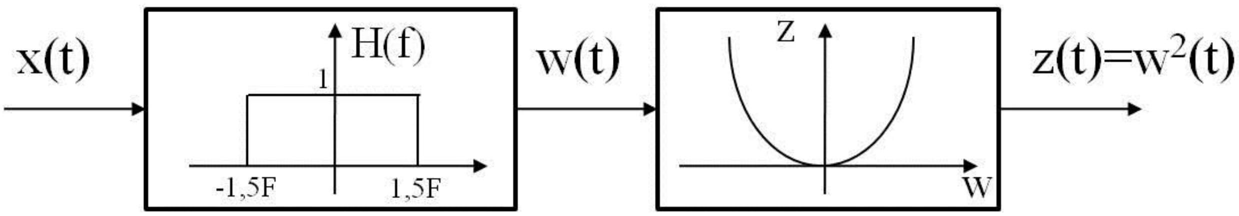
$$= \frac{1}{\pi w t^2}\left[\frac{8\pi}{w}\mathrm{Ca}(2\pi w t) - 2\cos(2\pi w t)\right]$$

da cui

$$\begin{cases} s_c(t) = \dfrac{1}{\pi w t^2}\left[\dfrac{8\pi}{w}\mathrm{Ca}(2\pi w t) - 2\cos(2\pi w t)\right] \\ s_s(t) = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 26

Sia $x(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(2\pi nFt + \phi_n)$, con F noto, un membro di un processo aleatorio le cui ampiezze $a_1,\dots,a_N$ sono note, e le fasi $\phi_1,\dots,\phi_N$ sono determinazioni di N variabili aleatorie statisticamente indipendenti tra loro e a distribuzione uniforme tra 0 e 2π. Supponendo che x(t) stransiti attraverso il sistema:



si calcoli la gerarchia di ordine 1 e lo spettro di densità di potenza del processo Z(t)

SVOLGIMENTO:

Le realizzazioni del processo aleatorio X(t) sono costituite dalla somma di N differenti realizzazioni di processi armonici, ciascuno con ampiezza nota a_n e fase ϕ_n istanza di una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2π. Poichè le fasi dei differenti processi sono tra di loro statisticamente indipendenti, tali saranno anche i processi armonici che costituiscono la sommatoria. Lo spettro di densità di potenza del processo X(t) sarà pertanto dato dalla somma dei singoli spettri di densità di potenza di ogni componente armonica.

Ricordando che un processo armonico $a_n \cos(2\pi nFt + \phi_n)$ ha come funzione di autocorrelazione l'espressione $\frac{a_n}{2}\cos(2\pi nFt)$, che quindi il suo spettro di densità di potenza è costituito da due impulsi posizionati in $\pm nF$, e che lo spettro di densità di potenza di w(t) è dato da $P_W(f) = P_X(f)\,|H(F)|^2$, si ottiene che solamente le componenti dello spettro di X(t) a frequenza $\pm F$ sopravvivono al transito del filtro H(f), e che pertanto il processo w(t) risulterà essere un processo armonico con realizzazione $a_1 \cos(2\pi nFt + \phi_1)$, dove a_1 è un valore noto mentre ϕ_1 è una determinazione di una variabile aleatoria a distribuzione uniforme tra 0 e 2π.

Per ciò che riguarda il processo Z(t), il suo spettro di densità di potenza si può ottenere come trasformata della funzione di autocorrelazione $p_{zz}(\tau)$, che essendo i processo ergodico è pari al momento misto di ordine (1,1) del processo. Si ha pertanto

$$p_{zz}(\tau) = m_z^{(1,1)}(\tau) = \overline{z_1 z_2}^{Z_1,Z_2;\tau} = \overline{w_1^2 w_2^2}^{W_1,W_2;\tau} = \overline{w_1^2(t)\,w_1^2(t+t)}^{t} =$$

$$= a_1^2\cos^2(2\pi Ft + f_1)\,a_1^2\cos^2(2\pi F(t+\tau) + f_1) =$$

$$= \int_{-p}^{p} \frac{a_1^4}{2p}\cos^2(2\pi Ft + f_1)\cos^2(2\pi F(t+\tau) + f_1)\,df_1 =$$

$$= \frac{a_1^4}{2p}\int_{-p}^{p} \frac{1+\cos(2\pi 2Ft + 2f_1)}{2}\,\frac{1+\cos(2\pi 2F(t+\tau) + 2f_1)}{2}\,df_1 =$$

$$=\frac{a_1^4}{8p}\int_{-p}^{p}[1+\cos(2\pi 2Ft+2f_1)+\cos(2\pi 2F(t+\tau)+2f_1)+$$

$$+\cos(2\pi 2Ft+2f_1)+\cos(2\pi 2F(t+\tau)+2f_1)]df_1=$$

$$=\frac{a_1^4}{8p}\int_{-p}^{p}df_1+\frac{a_1^4}{8p}\int_{-p}^{p}\cos(2\pi 2Ft+2f_1)df_1+\frac{a_1^4}{8p}\int_{-p}^{p}\cos(2\pi 2F(t+\tau)+2f_1)df_1+$$

$$+\frac{a_1^4}{8p}\int_{-p}^{p}\frac{1}{2}\left[\cos(2\pi 2F(2t+\tau)+4f_1)+\cos(2\pi 2F\tau)\right]df_1=$$

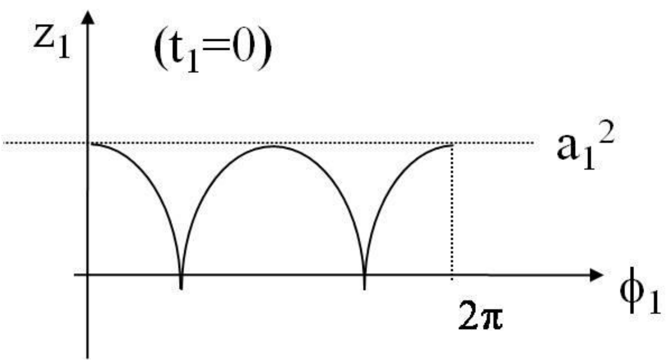
$$=\frac{a_1^4}{8p}\left\{2\pi+0+0+0+\frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\cos(2\pi 2F\tau)df_1\right\}=\frac{a_1^4}{4}+\frac{a_1^4}{8}\cos(2\pi 2F\tau)$$

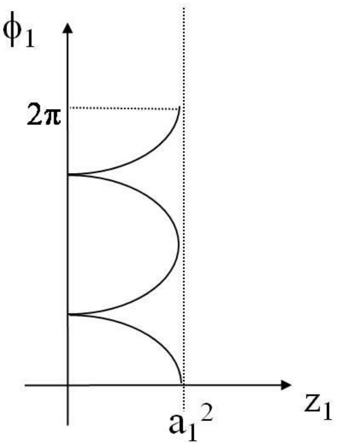
Per quel che riguarda il calcolo della gerarchia di ordine 1 del processo Z(t), si ha che

$$z(t)=w^2(t)=a_1^2\cos^2(2\pi Ft+f_1),\ \text{dove}\quad p_{f_1}(f_1)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}_{2\pi}(f_1-\pi)$$

Estraendo una variabile z_1 da z(t) selezionando l'istante di tempo t_1 si ottiene

$$z_1=z(t_1)=w^2(t_1)=a_1^2\cos^2(2\pi Ft_1+f_1)\quad \text{da cui}\quad \cos(2\pi Ft_1+f_1)=\pm\frac{\sqrt{z_1}}{|a_1|}\quad \text{e}\quad f_1=-2\pi Ft_1\pm\arccos\left(\pm\frac{\sqrt{z_1}}{|a_1|}\right)$$





In ciascuno dei 4 tratti in cui viene espressa la ϕ_1 in funzione della variabile z_1 si ottiene

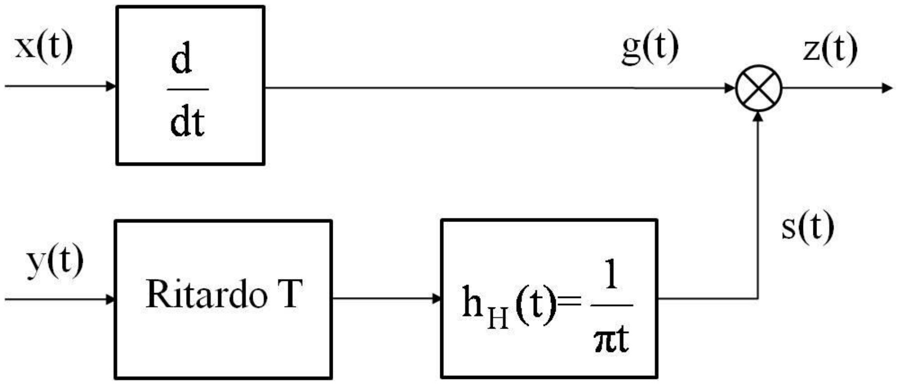
$$\left|\frac{df_1}{dz_1}\right|=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{z_1}{a_1^2}}}\frac{1}{|a_1|}\frac{1}{2\sqrt{z_1}}=\frac{1}{2\sqrt{z_1(a_1^2-z_1)}}$$

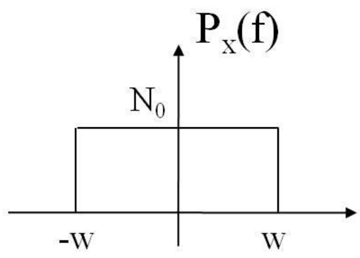
da cui

$$p_z(z)=\frac{1}{2\sqrt{z\left(a_1^{\,2}-z\right)}}\left[\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\right]=\frac{1}{\pi\sqrt{z\left(a_1^{\,2}-z\right)}},\quad 0<z<a_1^2$$

ESERCIZIO 27

Sia X(t) un processo Gaussiano, stazionario ed ergodico con spettro di densità di potenza $P_x(f)$. Sia poi Y(f) un processo armonico di ampiezza A e frequenza f_0, indipendente da X(t). Si calcoli il momento misto di ordine (1,1) del processo Z(t) ottenuto come da figura





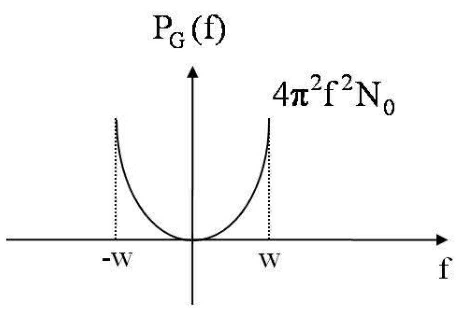
SVOLGIMENTO:

Si ottiene:

$$m_z^{(1,1)}(\tau)=z_1z_2^{\;Z_1,Z_2;\tau}=g_1s_1g_2s_2^{\;G_1,G_2,S_1,S_2;\tau}=g_1g_2^{\;G_1,G_2;\tau}\;s_1s_2^{\;S_1,S_2;\tau}=p_{gg}(\tau)p_{ss}(\tau)$$

essendo i processi X(t) e Y(t), e quindi anche G(t) e S(t), tra di loro indipendenti.
Per quel che riguarda il processo G(t) si ha:

$$P_G(f)=X(f)\left|j2\pi f\right|^2=4\pi^2f^2X(f)$$



mentre $P_S(f)=P_Y(f)\left|e^{-j2\pi fT}\right|^2\left|H_H(f)\right|^2=P_Y(f)=\frac{A^2}{4}\left[\mu_0(f-f_0)+\mu_0(f+f_0)\right]$ essendo $H_H(f)$ il filtro di Hilbert, e non venendo alterato dal ritardo T lo spettro del segnale y(t). Si ottiene perciò:

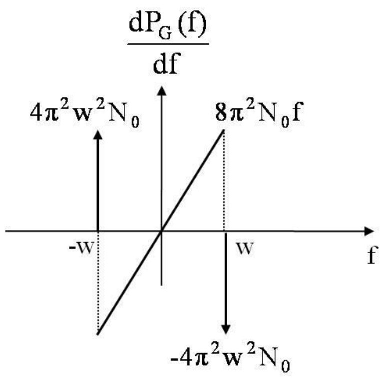
$$m_z^{(1,1)}(\tau)=p_{gg}(\tau)p_{ss}(\tau)=\mathrm{TF}^{-1}\{P_G(f)\cdot P_Y(f)\}=\frac{A^2}{4}\cdot\left[\mathrm{TF}^{-1}\{P_G(f)\}*\{\mu_0(f-f_0)+\mu_0(f+f_0)\}\right]=$$

$$=\frac{A^2}{4}\cdot\left[p_{gg}(t)*\left[\mu_0(f-f_0)+\mu_0(f+f_0)\right]\right]$$

Rimane pertanto da calcolare l'antitrasformata dello spettro di G(t), per poi moltiplicarla per $A^2/4$ e traslarla in $\pm f_0$. per il calcolo di $p_{gg}(t)$ si possono sfruttare le proprietà della trasformata della derivata di un segnale, e calcolare le derivate del primo e del secondo ordine di $P_G(F)$.

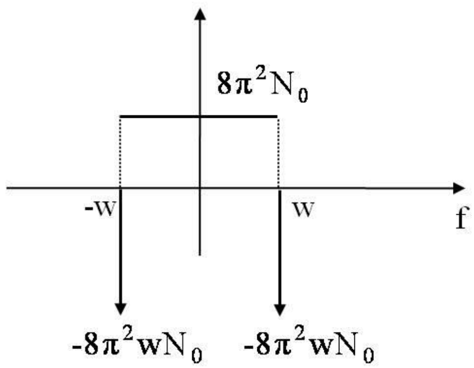
Si ottiene perciò

$$\frac{d\,P_G(f)}{df}=-4\pi^2 w^2 N_0\left[\mu_0(f-w)-\mu_0(f+w)\right]+8\pi^2 N_0 f\cdot \mathrm{rect}_{2w}(f)$$



Derivando ulteriormente lo spettro di G(t), escludendo gli impulsi in ±w, si ottiene:

$$\frac{d\left[8\pi^2 N_0 f\cdot \mathrm{rect}_{2w}(f)\right]}{df}=-8\pi^2 N_0 w\left[\mu_0(f-w)+\mu_0(f+w)\right]+8\pi^2 N_0\cdot \mathrm{rect}_{2w}(f)$$



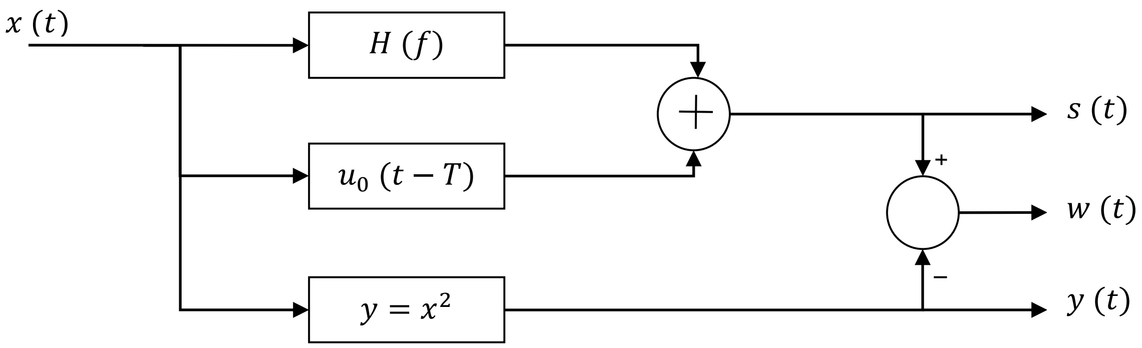
da cui pertanto

$$p_{gg}(t) = \frac{1}{-j2\pi t}\left[-8j\pi^2 w^2 N_0 \left[-\mathrm{sen}(2\pi wt)\right]\right] +$$

$$+\frac{1}{-j2\pi t}\cdot\frac{1}{-j2\pi t}\cdot\left[-16\pi^2 N_0 w\cdot\cos(2\pi wt) + 8\pi^2 N_0\cdot 2w\cdot \mathrm{Ca}(2\pi wt)\right] =$$

$$= -8\pi^2 w^3 N_0 \mathrm{Ca}(2\pi wt) + \frac{4wN_0}{t^2}\left[\cos(2\pi wt) - \mathrm{Ca}(2\pi wt)\right]$$

ESERCIZIO 28



Sia x(t) una realizzazione di un processo gaussiano, stazionario ergodico a media nulla con spettro di densità di potenza

$$P_x\,(f) = N_0\, rect_{\frac{1}{T}}(f) \quad \text{e sia} \quad H\,(f) = 1 - K\,e^{-j2\pi fT}$$

Si calcoli:

1) L'autocorrelazione $p_{ss}\,(\tau)$
2) Valore atteso m_w
3) Gerarchia di ordine 1 del processo w(t)
4) Lo spettro $P_y\,(f)$
5) Intercorrelazione tra s(t) e y(t) per $\tau = 0$, con K=1

SVOLGIMENTO

1)

$s\,(t) = x(t) * h(t) + x\,(t-T)$, dove $h(t) = u_o(t) - K\,u_o\,(t-T)$ da cui
$s\,(t) = x(t) + x(t-T)\,[1-K]$, da cui

$$\begin{aligned} p_{ss}\,(\tau) &= \overline{\{x(t) + x\,(t-T)[1-K]\}\{x\,(t+\tau) + (1-K)x\,(t+\tau-T)\}}^{t} = \\ &= \overline{x(t)x(t+\tau)}^{t} + (1-K)\,\overline{x(t)x(t+\tau-T)}^{t} + (1-K)\overline{x(t-T)x(t+\tau)}^{t} + \\ &\quad + (1-K)^2\overline{x(t-T)x(t+\tau-T)}^{t} = \\ &= p_{xx}(\tau) + (1-K)p_{xx}(\tau-T) + (1-K)p_{xx}(\tau+T) + (1-K)^2 p_{xx}\,(\tau) \end{aligned}$$

Dove

$p_{xx}(\tau) = \frac{N_0}{T}\,Ca\,(\frac{\pi}{T}\tau)$ da cui

$$p_{ss}(\tau) = (2 + K^2 - 2K)p_{xx}(\tau) + (1-K)\,[p_{xx}(\tau-T) + p_{xx}\,(\tau+T)]$$

2)

$$w\,(t) = s(t) - x^2(t) = x(t) + x(t-T)[1-k] - x^2(t)$$

$$m_w = \overline{w(t)}^t = m_x + m_x(1-k) - \overline{x^2(t)}^t = m_x(2-k) - {m_x}^{(2)} = -{\sigma_x}^2 = -p_{xx}(0) = -\frac{N_0}{T}$$

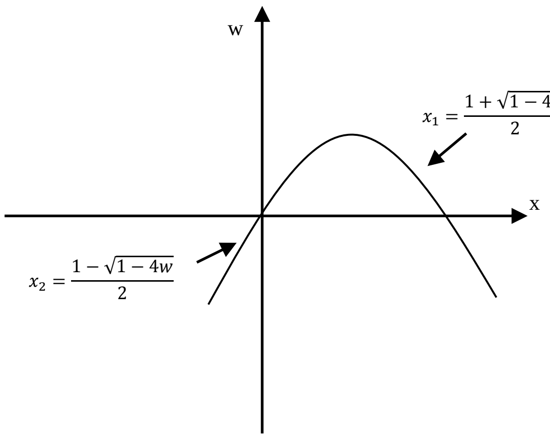
$m_x = 0$

3)

$$w(t) \overset{k=1}{=} x(t) - x^2(t)\,, \qquad x(t) \rightarrow \; p_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2{\sigma_x}^2}}$$

$$W = x - x^2$$

$$v = \left(-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2};\, \frac{1}{4}\right)$$



$$p_w(w) = p_x\big(x_1(w)\big)\left|\frac{dx_1}{dw}\right| + p_x\big(x_2(w)\big)\left|\frac{dx_2}{dw}\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-4w}}\left\{p_x\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-4w}\right] + p_x\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-4w}\right]\right\}$$

4)

$$y(t) = x^2(t), \qquad p_{yy}(\tau) = \overline{y(t)y(t+\tau)}^t = \overline{x^2(t)x^2(t+\tau)}^t = \widetilde{{x_1}^2{x_2}^2}^{x_1x_2\tau}$$

Ricordando che

$$E\{(x_1 - m_{x_1})(x_2 - m_{x_2})(x_3 - m_{x_3})(x_4 - m_{x_4})\} = \sigma_{x_1x_2}\sigma_{x_3x_4} + \sigma_{x_1x_3}\sigma_{x_2x_4} + \sigma_{x_1x_4}\sigma_{x_2x_3}$$

da cui, per $m_{x_2} = 0$

$$E\{{x_1}^2{x_2}^2\} = \sigma^2_{x_1x_2} + \sigma^2_{x_1}\,\sigma^2_{x_2} + \sigma^2_{x_1x_2} = 2\sigma^2_{x_1x_2} + \sigma^2_{x_1}\,\sigma^2_{x_2}$$

Dove $\sigma^2_{x_1} = \sigma^2_{x_2} = K_x(0) = p_{xx}(0) = F^{-1}\{P_x(f)\}\,|_{t=0} = \frac{\mathrm{N_0}}{\mathrm{T}}\mathrm{Ca}\left(\frac{\pi}{\mathrm{T}}\mathrm{t}\right)|_{\mathrm{t}=0} = \frac{\mathrm{N_0}}{\mathrm{T}}$

$m_x = 0$

Mentre

$$\sigma^2_{x_1x_2} = [E\{(x_1 - m_{x_1})(x_2 - m_{x_2})\}]^2 = p^2_{xx}(\tau) = \frac{N_0^2}{T^2}Ca^2\left(\frac{\pi}{T}\tau\right)$$

da cui

$$p_{yy}(\tau) = 2\frac{N_0^2}{T^2}Ca^2\left(\frac{\pi}{T}\tau\right) + \frac{N_0^2}{T^2}$$

5)

$$e_{sy}(\tau = 0) = ?$$

$$e_{sy}(\tau) = s(t) \circledast y(t) \underset{k=1}{\uparrow}{=} [x(t)] \circledast x^2(t) = \overline{x(t)x^2(t+\tau)}^{t} = \widetilde{x_1 x_2^2}^{x_1 x_2 \tau}$$

Ma essendo che

$$E_x\{(x_1 - m_{x_1})(x_2 - m_{x_2})(x_3 - m_{x_3})\} = 0$$

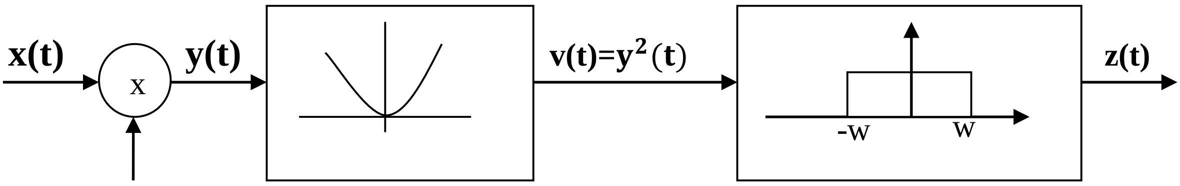
v.a congiuntamente gaussiana

Se si pone

$$x_2 = x_3 \rightarrow E_x\left\{(x_1 - m_{x_1})(x_2 - m_{x_2})^2\right\} \underset{m_{x_i}=0}{=} E\{x_1 x_2^2\} = 0$$

Da cui $e_{sy}(\tau) = 0$

ESERCIZIO 29



a(t) = $\boldsymbol{cos\,(2\pi f_0 t + \varphi)}$ (stat.indipend. da x(t))

Sia x(t) una realizzazione di un processo gaussiano, stazionario ergodico a media nulla con spettro di densità di potenza $P_{xx}(f) = N_0\ rect_{2w}(f),\ f_0 > 4w,$ e sia φ determinazione di una v.a. Φ uniformemente distribuita tra 0 e 2π.

Calcolare gli spettri di densità di potenza dei processi Y(t), V(t), Z(t)

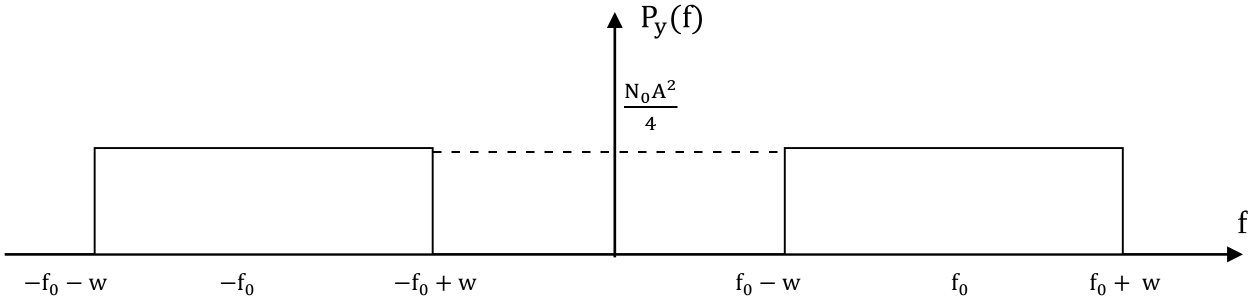
SVOLGIMENTO

$$y(t) = x(t)cos\,(2\pi f_0 t + \varphi) = x(t)a(t)$$

$$P_y(f) = F\{p_{yy}(\tau)\} = F\left\{m_y^{(1,1)}(\tau)\right\} = F\{\ \widetilde{y_1 y_2}^{y_1 y_2 \tau}\} = F\{\ x_1 \widetilde{a_1 x_2} a_2{}^{x_1 x_2 a_1 a_2 \tau}\} =$$
$$= F\{p_{xx}(\tau)p_{aa}(\tau)\} = F\{p_{xx}(\tau)\} * F\{p_{aa}(\tau)\} = P_x(f) * F\{p_{aa}(\tau)\}$$

Con

$$F\{p_{aa}(\tau)\} = F\{\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)\} = \frac{A^2}{4}u_0(f - f_0) + \frac{A^2}{4}u_0(f + f_0)$$



$$P_v(f) = F\{p_{vv}(\tau)\} = F\left\{m_v^{(1,1)}(\tau)\right\} = F\{\widetilde{v_1 v_2}^{v_1 v_2 \tau}\} = F\{\widetilde{y_1^2 y_2^2}^{y_1 y_2 \tau}\} = F\left\{\widetilde{x_1^2 a_1^2 x_2^2 a_2^2}^{x_1 x_2 a_1 a_2 \tau}\right\} =$$
$$= F\left\{\widetilde{x_1^2 x_2^2}^{x_1 x_2 \tau} \cdot \widetilde{a_1^2 a_2^2}^{a_1 a_2 \tau}\right\} = F\left\{\widetilde{x_1^2 x_2^2}^{x_1 x_2 \tau}\right\} * F\left\{\widetilde{a_1^2 a_2^2}^{a_1 a_2 \tau}\right\}$$

Per i processi gaussiani si ha che

$$\mu_x^{(1,1,1,1)} = E_x\{(x_1 - m_{x_1})(x_2 - m_{x_2})(x_3 - m_{x_3})(x_4 - m_{x_4})\} =$$
$$= \sigma_{x_1 x_2}\sigma_{x_3 x_4} + \sigma_{x_1 x_3}\sigma_{x_2 x_4} + \sigma_{x_1 x_4}\sigma_{x_2 x_3}$$

Ponendo $x_3 = x_1$ e $x_4 = x_2 \longrightarrow E_x\{x_1^2 x_2^2\} = \sigma_{x_1 x_2}^2 + \sigma_{x_1}^2\sigma_{x_2}^2 + \sigma_{x_1 x_2}^2 = 2\sigma_{x_1 x_2}^2 + \sigma_{x_1}^2\sigma_{x_2}^2$

Essendo il processo <u>stazionario</u> si ha anche che $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2}$ da cui

$$\widetilde{x_1x_2}^{x_1x_2\tau} = 2\sigma^2_{x_1x_2} + \sigma^4_{x_1} = 2\sigma^2_{x_1x_2} + (\sigma^2_{x_1})^2$$

Essendo $m_x = 0$ (dallo spettro) si ottiene

$$\begin{cases} \sigma_{x_1}{}^2 = m_{x_1}{}^{(2)} - m_x{}^2 = m_{x_1}{}^{(2)} = \overline{x^2(t)}^{\,t} = P_x \\ \qquad\qquad \sigma_{x_1x_2 = m_x^{(1,1)}(\tau)} \end{cases}$$

Da cui

$$E_x\{x_1^2x_2^2\} = 2[m_x^{(1,1)}(\tau)]^2 + P_x^2 = 2\,p_{xx}^2(\tau) + P_x^2$$

$m_x = 0$ ed ergodicità ($\sigma_{x_1}{}^2 = P_x$)

$$F\left\{\widetilde{x_1^2x_2^2}\right\} = 2\,F\{p_{xx}(\tau)\} * F\{p_{xx}(\tau)\} + P_x^2u_0(t) = 2\,N_0^2\,rect_{2w}(f) * rect_{2w}(f) + P_x^2u_0(t) =$$
$$= 4N_0{}^2w\,tri_{2w}(f) + P_x^2u_0(t) \qquad\qquad P_x = 2wN_0$$

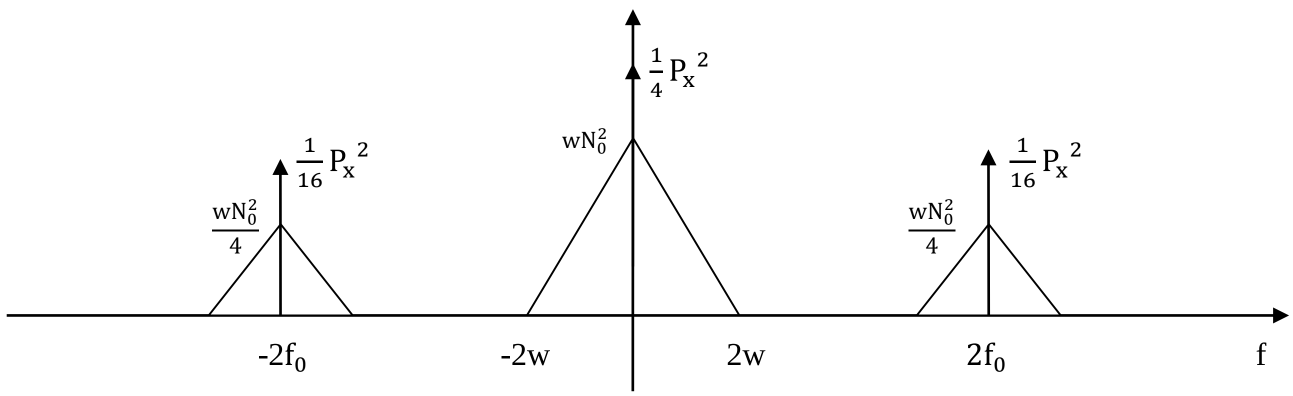
Si ha poi

$$\widetilde{a_1^2a_2^2}^{a_1a_2\tau} = \cos^2(2\pi f_0t + \varphi)\cos^2[2\pi f_0(t+\tau) + \varphi]^{\,\Phi} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(2\pi f_0t + \varphi)\cos^2[2\pi f_0(t+\tau) + \varphi]d\varphi =$$
$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}[1+\cos(4\pi f_0t + 2\varphi)][1+\cos(4\pi f_0(t+\tau) + 2\varphi)]d\varphi =$$
$$= \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}1+\cos(4\pi f_0t + 2\varphi) + \cos(4\pi f_0(t+\tau) + 2\varphi)] + \frac{\cos[4\pi f_0(2t+\tau)+4\varphi]+\cos(4\pi f_0\tau)}{2}d\varphi =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cos(4\pi f_0\tau)$$

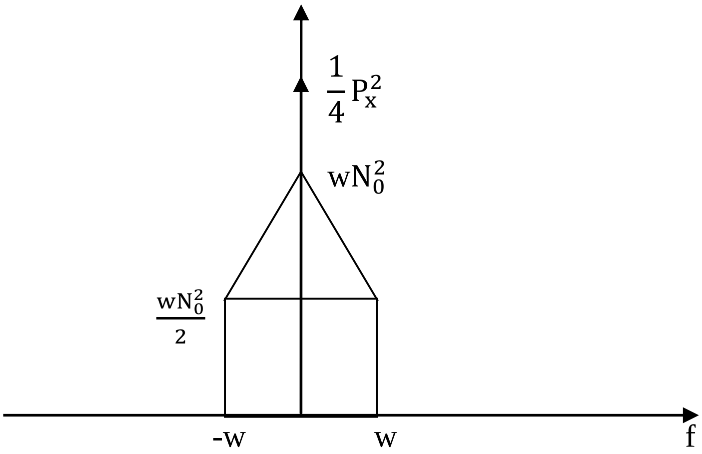
Da cui

$$F\{\widetilde{a_1^2a_2^2}^{a_1a_2\tau}\} = \frac{1}{4}u_0(f) + \frac{1}{16}u_0(f-2f_0) + \frac{1}{16}u_0(f+2f_0)$$

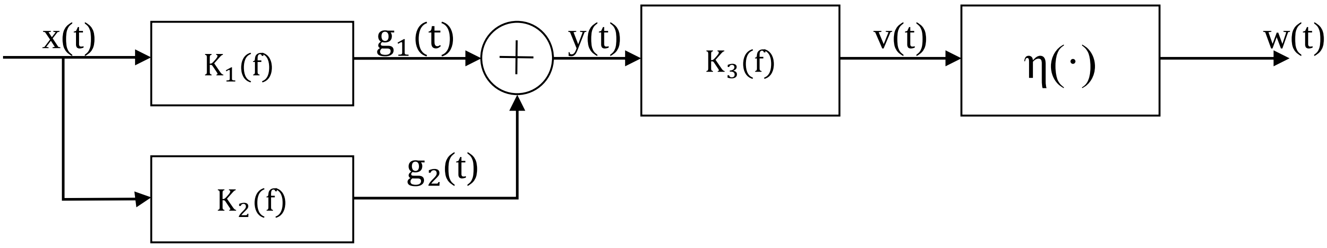
$$P_v(f) = [4wN_0^2tri_{2w}(f) + P_x^2u_0(f)] * [\tfrac{1}{4}u_0(f) + \tfrac{1}{16}u_0(f-2f_0) + \tfrac{1}{16}u_0(f+2f_0)\,]$$



Essendo poi $P_z(f) = P_v(f)|H(f)|^2$ si ottiene



ESERCIZIO 30



Sia x(t) una realizzazione di un processo gaussiano, stazionario ergodico a media nulla con spettro di densità di potenza

$$P_{xx}\begin{cases} 2N_0\,(2-|f|T); & -\frac{2}{T}<f<\frac{2}{T} \\ 0\qquad\qquad ; & \text{altrove} \end{cases}$$

$$K_1(f) = \ \mathrm{rect}_{\frac{2}{T}}(f);\quad K_2(f) = \ \mathrm{rect}_{\frac{3}{T}};\quad K_3(f) = J\,\mathrm{sign}(f)e^{j2\pi f(T^3+T)}$$

$$\eta[v(t)]\begin{cases} 4; & v(t)\le -2 \\ v^2(t); & -2\le v(t)\le\ 2 \\ 4; & v(t)\ge 2 \end{cases}$$

Si calcolino le gerarchie di primo ordine di w(t): $p_w(w)$ =?

SVOLGIMENTO

v(t) è gaussiano con $p_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}e^{-\frac{(v-m_v)^2}{2\sigma_v^2}}$

Poiché $m_x = 0$, allora anche $m_v = 0$. Per σ_v^2 si ha

$$\sigma_v^2 = \ K_v(0) \underset{\substack{\uparrow \\ m_v\,=\,0}}{=} p_{vv}(0) = \left[p_{yy}(t) * e_{k_3k_3}(t)\right]\big|_{t=o} = \int_{-\infty}^{\infty} F\{p_{yy}(t) * \ e_{k_3k_3}(t)\}\ df =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F\{p_{yy}(t)\}\underset{\substack{\uparrow \\ F\{e_{kk}\}\,=\,|H(f)|^2}}{|(-1)|}df = \int_{-\infty}^{\infty} P_y(f)df = \ p_{yy}(0) = \ \sigma_y^2$$

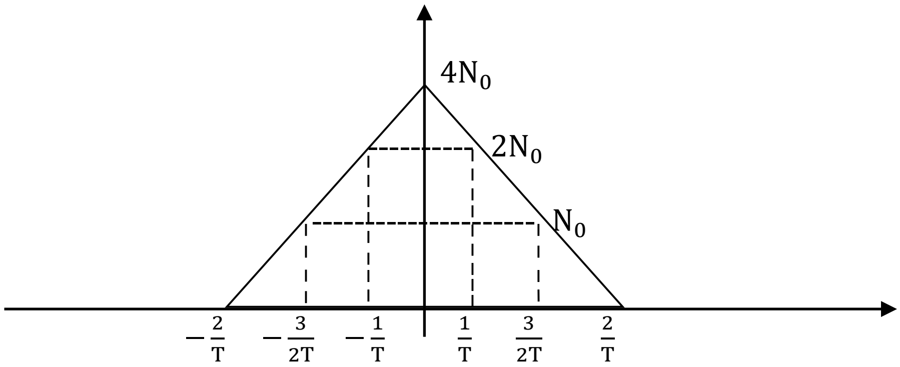
y(t)= x(t) * $k_1(t)$ + x(t) * $k_2(t) = \ g_1(t) + \ g_2(t)$

$$p_{yy}(\tau) = \ \overline{y(t)y(t+\tau)}^{\,t} = \overline{[g_1(t) + \ g_2(t)][g_1(t+\tau) + g_2(t+\tau)]}^{\,t} =$$
$$= \ \overline{g_1(t)g_1(t+\ \tau)}^{\,t} + \overline{g_2(t)g_2(t+\tau)}^{\,t} + \ \overline{g_1(t)g_2(t+\tau)}^{\,t} + \overline{g_2(t)g_1(t+\tau)}^{\,t} =$$
$$= p_{g_1g_1}(\tau) + p_{g_2g_2}(\tau) + p_{g_1g_2}(\tau) + p_{g_1g_2}(-\tau)$$

$$p_{g_1g_1}(\tau) = \ p_{xx}(\tau) * \ e_{k_1k_1}(\tau);\qquad\qquad p_{g_2g_2}(\tau) = p_{xx}(\tau) * \ e_{k_2k_2}(\tau)$$

$$p_{g_1g_2}(\tau) = \overline{g_1(t)g_2(t+\tau)}^{\,t} = g_1(t) \circledast g_2(t) = g^*{}_1(-t) * g_2(t) = g_1(-t) * g_2(t) =$$
$$= [x(-t) * h_1(-t)] * [x(t) * h_2(t)] = x(-t) * x(t) * h_1(-t) * h_2(t) =$$
$$= p_{xx}(\tau) * e_{h_1h_2}(\tau)$$

$$F\{p_{g_1g_2}(\tau)\} = P_x(f) \,.\, F\{e_{h_1h_2}(\tau)\} = P_x(f) \,.\, H_1(-f) \,.\, H_2(f)$$



$$p_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}} \quad ; \quad \sigma_v^2 = \sigma_y^2 = p_{yy}(0) = p_{g_1g_1}(0) + p_{g_2g_2}(0) + 2p_{g_1g_2}(0);$$

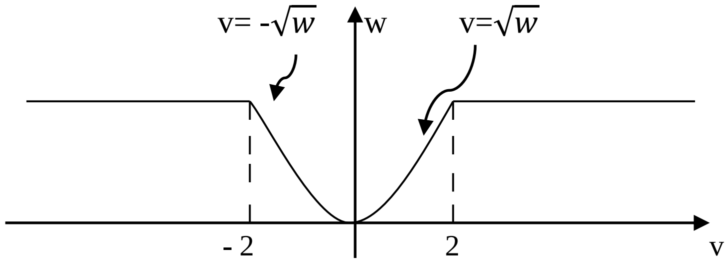
$$p_{g_1g_1}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F\{p_{g_1g_1}(\tau)\, df = \int_{-\infty}^{\infty} F\{p_{xx}(\tau) * e_{h_1h_1}(\tau)\}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} F\{p_{xx}(\tau)\}\, F\{e_{h_1h_1}(\tau)\}\, df =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) \,.\, |H_1(f)|^2\, df = \frac{2}{T}\, 2N_0 + \frac{2}{T}\, 2N_0\, \frac{1}{2} = \frac{6}{T} N_0$$

$$p_{g_2g_2}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F\{p_{xx}(\tau) * e_{h_2h_2}(\tau)\}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) \,.\, |H_2(f)|^2\, df = \frac{3}{T} N_0 + \frac{3}{T}\, 3N_0\, \frac{1}{2} = \frac{15}{2T} N_0$$

$$p_{g_1g_2}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} P_x(f) \,.\, H_1(-f) H_2(f) df = \int_{-\frac{1}{T}}^{\frac{1}{T}} P_x(f) = \frac{6}{T} N_0$$

$$\sigma_v^2 = \frac{51}{2T} N_0$$

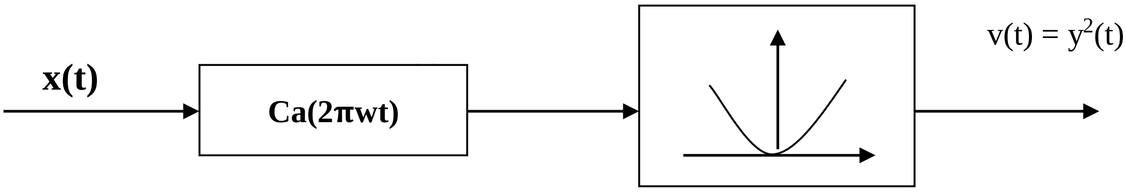
Si ha poi



$$p_v(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{v^2}{2\sigma_v^2}}$$

$$p_{w(w)} \begin{cases} 0; \qquad w \le 0 \quad \cup \quad w \ge 4 \\ \int_{-\infty}^{-2} p_v(v)dv + \int_{2}^{\infty} p_v(v)dv = 2erfc\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma_v}\right) \,.\, u_0(w-4);\; erfc(x) = \int_x^{\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt;\;\; w = 4 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{w}{2\sigma_v^2}} \,.\, \left|-\frac{1}{2\sqrt{w}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v} e^{-\frac{w}{2\sigma_v^2}} \left|\frac{1}{2\sqrt{w}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}\sigma_v} e^{-\frac{w}{2\sigma_v^2}} \;; \quad 0 < w < 4 \end{cases}$$

ESERCIZIO 31



Sia x(t) una realizzazione di un processo gaussiano, stazionario ergodico a media nulla e con covarianza $K_x(\tau) = Ca^2(2\pi w\tau)$; si calcoli

a) $p_{yy}(\tau)$;

b) La gerarchia di ordine 1 per v(t)

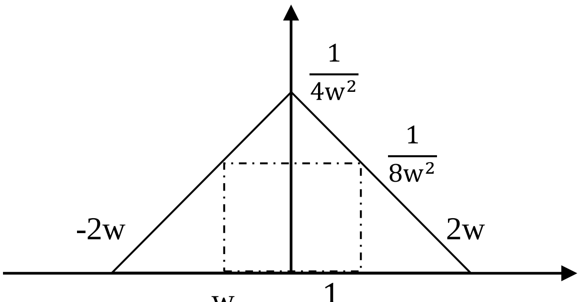
SVOLGIMENTO

a) Si ha $p_{yy}(\tau) = p_{xx}(\tau) * e_{hh}(\tau) \rightarrow \quad F\{p_{yy}(\tau)\} = P_y(f) = P_x(f)|H(f)|^2$

dove

$$p_{xx}(\tau) = K_x(\tau) + m_x \overset{m_x=0}{\downarrow} = K_x(\tau) \rightarrow P_x(f) = F\{Ca(2\pi w\tau)\} = \frac{1}{4w^2}\mathrm{rect}_{2w}(f) * \mathrm{rect}_{2w} = \frac{1}{2w}\mathrm{tri}_{2w}(f)$$

$|H(f)| = \frac{1}{2w}\mathrm{rect}_{2w}(f)$



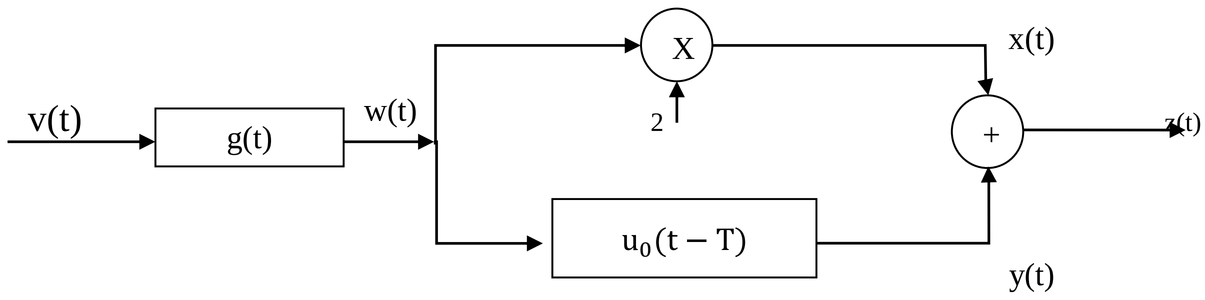
$$P_y(f) = \frac{1}{8w^2}[\mathrm{rect}_{2w}(f) + \mathrm{tri}_w(f)] \rightarrow p_{yy}(\tau) = \frac{1}{8w^2}[2w\,Ca(2\pi w\tau) + w\,Ca^2(\pi w\tau)]$$

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}}; \qquad \sigma_y^2 = K_y(0) = p_{yy}(0) = \frac{1}{8w^2}[2w + w] = \frac{3}{8w}$$

Da cui

$$p_v(v)\begin{cases} 0; & v \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{v}{2\sigma_y^2}} \cdot \left|-\frac{1}{2\sqrt{v}}\right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{v}{2\sigma_y^2}} \cdot \left|\frac{1}{2\sqrt{v}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi v}\sigma_y} e^{-\frac{v}{2\sigma_y^2}}; & v > 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 32



Sia v(t) una realizzazione di un processo gaussiano, stazionario ergodico a media nulla con spettro di densità di potenza bianco $P_v(f) = 2T$
g(t)=$\frac{1}{2T}\mathrm{rect}_{2T}(t)$;
Si calcoli la funzione di densità di probabilità della v.a "z" estratta dal processo Z(t) per t=0.
<u>Nota:</u> essendo i processi in gioco stazionari ed ergodici, la statistica del primo ordine è la stessa per qualsiasi istante di tempo si consideri

SVOLGIMENTO

z(t) = y(t) + x(t) = w(t-T) + 2w(t) → $z_0 = w(0-T) + 2w(0) = w_1 + 2w_2$

Il processo W(t) è però ancora gaussiano, stazionario ed ergodico, come V(t), da cui

$p_{w_1} = p_{w_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{(w-m_w)^2}{2\sigma_w^2}}$ con $m_w = 0$ essendo $m_v = 0$, da cui

$m_z = m_{w_1} + 2m_{w_2} = 0$; si ha perciò che anche z è una v.a gaussiana con

$p_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$

distanza temporale tra w_1 e w_2

Rimane da calcolare $\sigma_z^2 = \widetilde{z_0^2}^{z_0} = \widetilde{(w_1 + 2w_2)^2}^{w_1,w_2,T} = \widetilde{w_1^2}^{w_1} + 4\widetilde{w_2^2}^{w_2} + 4\widetilde{w_1 w_2}^{w_1 w_2} =$

$= 5\sigma_w^2 + 4\, m_w{}^{(1,1)}(T)$

Dove

$m_w{}^{(1,1)}(T) = p_{ww}(T) = p_{vv}(\tau) * e_{gg}(\tau)|_{\tau=T}$

$$e_{gg}(\tau) = g(\tau) \circledast g(\tau) = g^*(-\tau) * g(\tau) = \left(\frac{1}{2T}\right)^2 .\ 2T\,\mathrm{tri}_{2T}(\tau) = \frac{1}{2T}\mathrm{tri}_{2T}(\tau)$$

$$p_{ww}(\tau) = [2Tu_0(\tau)] * \left[\frac{1}{2T}\mathrm{tri}_{2T}(\tau)\right] = \mathrm{tri}_{2T}(\tau) \rightarrow \begin{cases} \sigma_w^2 = p_{ww}(0) = 1 \\ w_w^{(1,1)}(T) = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \sigma_z^2 = 7$$

$$p_z(z) = \frac{1}{\sqrt{14\pi}} e^{-\frac{z^2}{14}}$$

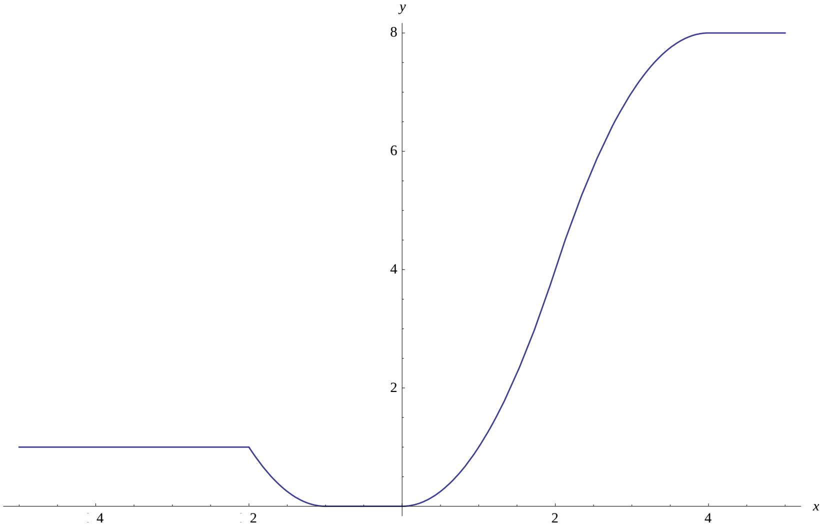
ESERCIZIO 33 [ESAME DEL 20/04/2007]

Sia X una variabile aleatoria con funzione di distribuzione di probabilità:

$$D_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{2x} & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\, e^{-4x} & x > 0 \end{cases}$$

Si calcoli la funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria Y, ottenuta tramite la seguente trasformazione:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & x < -2 \\ (x+1)^2 & x \in [-2,-1] \\ 0 & x \in [-1,0] \\ x^2 & x \in [0,2] \\ 8-(x-4)^2 & x \in [2,4] \\ 8 & x > 4 \end{cases}$$



SVOLGIMENTO

La funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria X può essere calcolata a partire dalla funzione di distribuzione:

$$p_X(x) = \frac{dD_X(x)}{dx} = \begin{cases} e^{2x} \\ 2e^{-4x} \end{cases}$$

La variabile aleatoria Y è ottenuta da X tramite la trasformazione y=f(x). Ricordando che

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} p_X\left[g_i(y)\right] \cdot \left| \frac{dg_i(y)}{dy} \right|$$

avendo indicato con $g_i(y)$ le funzioni inverse dei diversi tratti della funzione f(x). In particolare:

$$f_1(x) = (x+1)^2 \quad \rightarrow g_1(y) = -1-\sqrt{y} \quad \rightarrow \frac{dg_1(y)}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_2(x) = x^2 \quad \rightarrow g_2(y) = \sqrt{y} \quad \rightarrow \frac{dg_2(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_3(x) = 8-(x-4)^2 \quad \rightarrow g_3(y) = 4-\sqrt{8-y} \quad \rightarrow \frac{dg_3(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{8-y}}$$

La funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria Y può essere, quindi, calcolata nel seguente modo:

- $y < 0 \quad \rightarrow p_Y(y) = 0$
- $y = 0 \rightarrow \quad p_Y(y) = \int_{-1}^{0} e^{2x} dx \cdot u_0(y) = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{-1}^{0} \cdot u_0(y) = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}\right] \cdot u_0(y)$
- $0 < y < 1 \rightarrow$
  $p_Y(y) = p_X\left[g_1(y)\right] \cdot \left|\frac{dg_1(y)}{dy}\right| + p_X\left[g_2(y)\right] \cdot \left|\frac{dg_2(y)}{dy}\right| = e^{2(-1-\sqrt{y})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + 2e^{-4\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} =$
  $= \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \left[e^{-2(1+\sqrt{y})} + 2e^{-4\sqrt{y}}\right]$
- $y = 1 \rightarrow p_Y(y) = \int_{-\infty}^{-2} e^{2x} dx \cdot u_0(y-1) = \frac{1}{2}\left[e^{2x}\right]_{-\infty}^{-2} \cdot u_0(y-1) = \frac{1}{2e^4} \cdot u_0(y-1)$
- $1 < y \le 4 \rightarrow p_Y(y) = p_X\left[g_2(y)\right] \cdot \left|\frac{dg_2(y)}{dy}\right| = 2e^{-4\sqrt{y}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{e^{-4\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}$
- $4 < y < 8 \rightarrow p_Y(y) = p_X\left[g_3(y)\right] \cdot \left|\frac{dg_3(y)}{dy}\right| = 2e^{-4\left(4-\sqrt{8-y}\right)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{8-y}} = \frac{e^{-4\left(4-\sqrt{8-y}\right)}}{\sqrt{8-y}} = \frac{1}{e^{16}} \cdot \frac{e^{4\cdot\sqrt{8-y}}}{\sqrt{8-y}}$
- $y = 8 \rightarrow p_Y(y) = \int_{4}^{+\infty} 2e^{-4x} dx \cdot u_0(y-8) = -\frac{1}{2}\left[e^{-4x}\right]_{4}^{\infty} \cdot u_0(y-8) = \frac{1}{2e^{16}} \cdot u_0(y-8)$
- $y > 8 \rightarrow \ p_Y(y) = 0$

In sintesi:

$$p_Y(y)=\begin{cases} 0 & y<0 \\ \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}\right]\cdot u_0(y) & y=0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\left[e^{-2(1+\sqrt{y})}+2e^{-4\sqrt{y}}\right] & 0<y<1 \\ \frac{1}{2e^4}\cdot u_0(y-1) & y=1 \\ \frac{e^{-4\sqrt{y}}}{\sqrt{y}} & 1<y\le 4 \\ \frac{1}{e^{16}}\cdot\frac{e^{4\cdot\sqrt{8-y}}}{\sqrt{8-y}} & 4<y<8 \\ \frac{1}{2e^{16}}\cdot u_0(y-8) & y=8 \\ 0 & y>8 \end{cases}$$

Verifica che la $p_Y(y)$ soddisfi la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)dy=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}+\int_0^1\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\left[e^{-2(1+\sqrt{y})}+2e^{-4\sqrt{y}}\right]dy+\frac{1}{2e^4}+\int_1^4\frac{e^{-4\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}dy+\int_4^8\frac{1}{e^{16}}\cdot\frac{e^{4\cdot\sqrt{8-y}}}{\sqrt{8-y}}dy+\frac{1}{2e^{16}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{2e^2}\int_0^1\frac{e^{-2\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}dy+\int_0^1\frac{e^{-4\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}dy+\frac{1}{2e^4}+\int_1^4\frac{e^{-4\sqrt{y}}}{\sqrt{y}}dy+\frac{1}{e^{16}}\cdot\int_4^8\frac{e^{4\cdot\sqrt{8-y}}}{\sqrt{8-y}}dy+\frac{1}{2e^{16}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{2e^2}\cdot\left[e^{-2\sqrt{y}}\right]_0^1-\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-4\sqrt{y}}\right]_0^1+\frac{1}{2e^4}-\frac{1}{2}\cdot\left[e^{-4\sqrt{y}}\right]_1^4-\frac{1}{2e^{16}}\cdot\left[e^{4\sqrt{8-y}}\right]_4^8+\frac{1}{2e^{16}}=$$

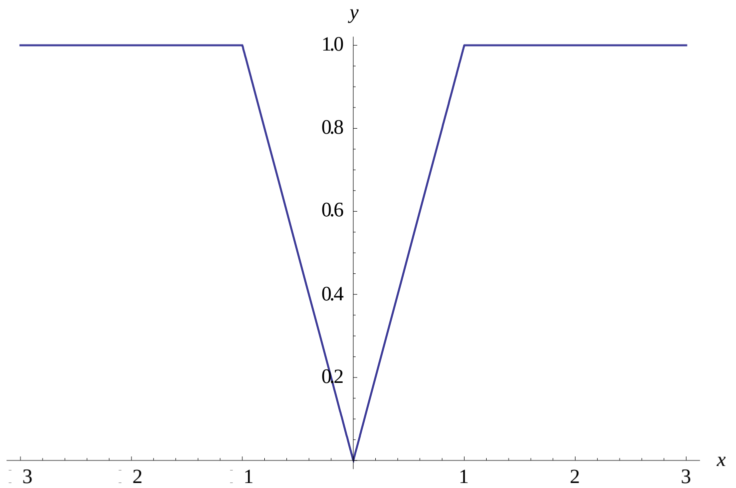
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}-\frac{1-e^2}{2e^4}-\frac{1-e^4}{2e^4}+\frac{1}{2e^4}-\frac{1-e^4}{2e^8}-\frac{1-e^8}{2e^{16}}+\frac{1}{2e^{16}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{2e^4}+\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{2e^4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2e^4}-\frac{1}{2e^8}+\frac{1}{2e^4}-\frac{1}{2e^{16}}+\frac{1}{2e^8}+\frac{1}{2e^{16}}=1$$

ESERCIZIO 34 [ESAME DEL 30/11/2004]

Sia X una variabile aleatoria gaussiana a valore atteso nullo ($m_x = 0$) e varianza $\sigma_x^2 = 4$.

a) Calcolare la f.d.p. della variabile aleatoria Y ottenuta mediante la trasformazione:



b) Si calcoli il valore atteso di Y

SVOLGIMENTO

a) Essendo X una variabile aleatoria gaussiana, la sua funzione di densità di probabilità avrà la seguente forma:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\left(\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_X^2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{8}}$$

La trasformazione che consente di ottenere la variabile aleatoria Y può essere formalizzata nel seguente modo:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ -x & x \in [-1,0] \\ x & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Ricordando che

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} p_X\left[g_i(y)\right] \cdot \left|\frac{dg_i(y)}{dy}\right|$$

avendo indicato con $g_i(y)$ le funzioni inverse dei diversi tratti della funzione f(x). In particolare:

$$f_1(x) = -x \quad \rightarrow g_1(y) = -y \quad \rightarrow \frac{dg_1(y)}{dy} = -1$$

$$f_2(x) = x \quad \rightarrow g_2(y) = y \quad \rightarrow \frac{dg_2(y)}{dy} = 1$$

La funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria Y può essere, quindi, calcolata nel seguente modo:

- $y<0 \quad \rightarrow p_Y(y)=0$
- $y \in [0,1] \rightarrow$

$$p_Y(y)=p_X\left[g_1(y)\right]\cdot\left|\frac{dg_1(y)}{dy}\right|+p_X\left[g_2(y)\right]\cdot\left|\frac{dg_2(y)}{dy}\right|=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}$$

- $y=1\rightarrow$

$$p_Y(y)=\left[\int_{-\infty}^{-1}p_X(x)dx+\int_{1}^{+\infty}p_X(x)dx\right]\cdot u_0(y-1)=\left[\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{8}}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{8}}dx\right]\cdot u_0(y-1)=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right]\cdot u_0(y-1)=\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot u_0(y-1)$$

Ricordando che $\quad \operatorname{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x}^{+\infty}e^{-t^2}dt$

- $y>1\rightarrow \; p_Y(y)=0$

In sintesi:

$$p_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}} & 0<y<1\\ \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot u_0(y-1) & y=1\\ 0 & y>1\end{cases}$$

Verifica che la $p_Y(y)$ soddisfi la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p_Y(y)dy=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}\,dy+\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\operatorname{erf}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)+\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=1$$

Ricordando che $\quad \operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$

b) il valore atteso della variabile aleatoria Y può essere calcolato nel seguente modo:

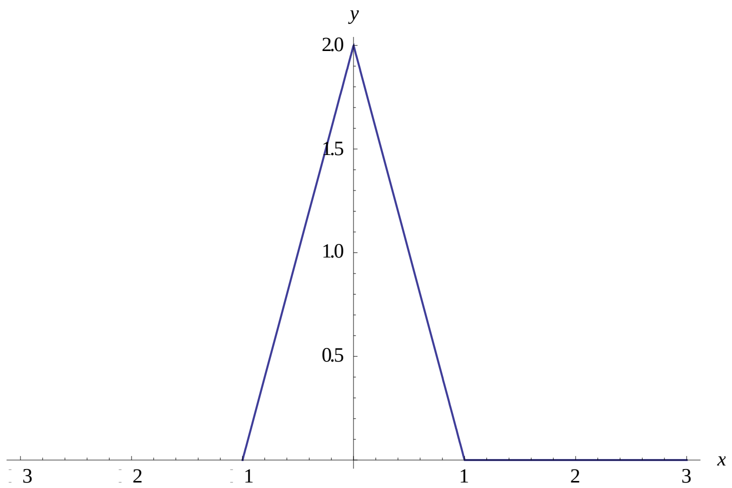
$$m_Y=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p_Y(y)dy=\int_0^1 y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{8}}dy+\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot u_0(y-1)dy=$$

$$=\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1-\frac{y}{4}\cdot e^{-\frac{y^2}{8}}dy=\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot\left[e^{-\frac{y^2}{8}}\right]_0^1=\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{8}}+\frac{4}{\sqrt{2\pi}}$$

ESERCIZIO 35 [ESAME DEL 29/09/2007]

Sia X una variabile aleatoria gaussiana a valore atteso nullo e varianza $\sigma_x^2 = 2$.

a) Calcolare la funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria Y ottenuta mediante la trasformazione



b) Si calcoli il valore atteso di Y.

SVOLGIMENTO

Essendo X una variabile aleatoria gaussiana, la sua funzione di densità di probabilità sarà pari a:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\left(\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_X^2}\right)}$$

In particolare, poiché X è a valore atteso nullo ($m_x = 0$) e $\sigma_x^2 = 2$, la sua funzione di densità di probabilità risulterà pari a: $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$

a) La variabile aleatoria Y è ottenuta da X tramite la trasformazione y=f(x) con

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x+2 & -1 \le x \le 0 \\ -2x+2 & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Ricordando che $p_Y(y) = \sum_{i=1}^{n} p_X\left[g_i(y)\right] \cdot \left|\frac{dg_i(y)}{dy}\right|$

Con $g(y) = \begin{cases} \frac{y-2}{2} = g_1(y) \\ \frac{2-y}{2} = g_2(y) \end{cases} \Rightarrow \frac{dg(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{dg_1(y)}{dy} \\ -\frac{1}{2} = \frac{dg_2(y)}{dy} \end{cases}$

Di conseguenza si ha che

- $y < 0 \rightarrow p_Y(y) = 0$

- y=0 $\rightarrow$

$$p_Y(y)=\left[\int_{-\infty}^{-1}p_X(x)dx+\int_{1}^{+\infty}p_X(x)dx\right]\cdot u_0(y)=\left[\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{x^2}{4}}dx\right]\cdot u_0(y)=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot u_0(y)=\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot u_0(y)$$

- $y\in[0,2]\rightarrow$

$$p_Y(y)=\sum_{i=1}^{n}p_X\left[g_i(y)\right]\cdot\left|\frac{dg_i(y)}{dy}\right|=\sum_{i=1}^{2}p_X\left[g_i(y)\right]\cdot\left|\frac{dg_i(y)}{dy}\right|=p_X\left[\frac{y}{2}-1\right]\cdot\frac{1}{2}+p_X\left[1-\frac{y}{2}\right]\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}-1\right)^2}+\frac{1}{2\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{1}{4}\left(1-\frac{y}{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{4}+1-y\right)}+\frac{1}{2\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{4}+1-y\right)}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{4}+1-y\right)}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{y}{2}-1\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{16}}$$

- $y>2\rightarrow\ p_Y(y)=0$

In sintesi:

$$p_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\right)\cdot u_0(y) & y=0\\ \frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{16}} & 0<y<2\\ 0 & y>2\end{cases}$$

Verifica che la $p_Y(y)$ soddisfi la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p_Y(y)dy=\int_0^2\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{16}}\ dy+\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\right)\ =\mathrm{erf}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\right)=1$$

Ricordando che $\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ e $\mathrm{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt$

b) il valore atteso della variabile aleatoria Y può essere calcolato nel seguente modo:

$$m_Y=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot p_Y(y)dy=\int_0^2 y\cdot\frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{(y-2)^2}{16}}\ dy+\mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2}\right)\ \cdot\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot u_0(y)dy=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_0^2 y\cdot e^{-\frac{(y-2)^2}{16}}dy$$

Avendo posto: $y-2=t$

$$m_Y=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-2}^{0}(t+2)\cdot e^{-\frac{t^2}{16}}dt=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-2}^{0}t\cdot e^{-\frac{t^2}{16}}dt+\frac{2}{\sqrt{4\pi}}\int_{-2}^{0}e^{-\frac{t^2}{16}}dt=-\frac{8}{\sqrt{4\pi}}\int_{-2}^{0}-\frac{t}{8}\cdot e^{-\frac{t^2}{16}}dt+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-2}^{0}e^{-\frac{t^2}{16}}dt$$

$$=-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-\frac{t^2}{16}}\right]_{-2}^{0}+2\mathrm{erf}\left(\frac{1}{2}\right)=2\mathrm{erf}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\left[1-e^{-1/4}\right]$$

ESERCIZIO 36 [ESAME DEL 26/04/2005]

Si consideri la variabile aleatoria bidimensionale (X,Y) con funzione di densità di probabilità

$$p_{X,Y}(x,y) = K\,|\,y\,|\,\mathrm{rect}_1(y)\,\mathrm{rect}_2(x-1)$$

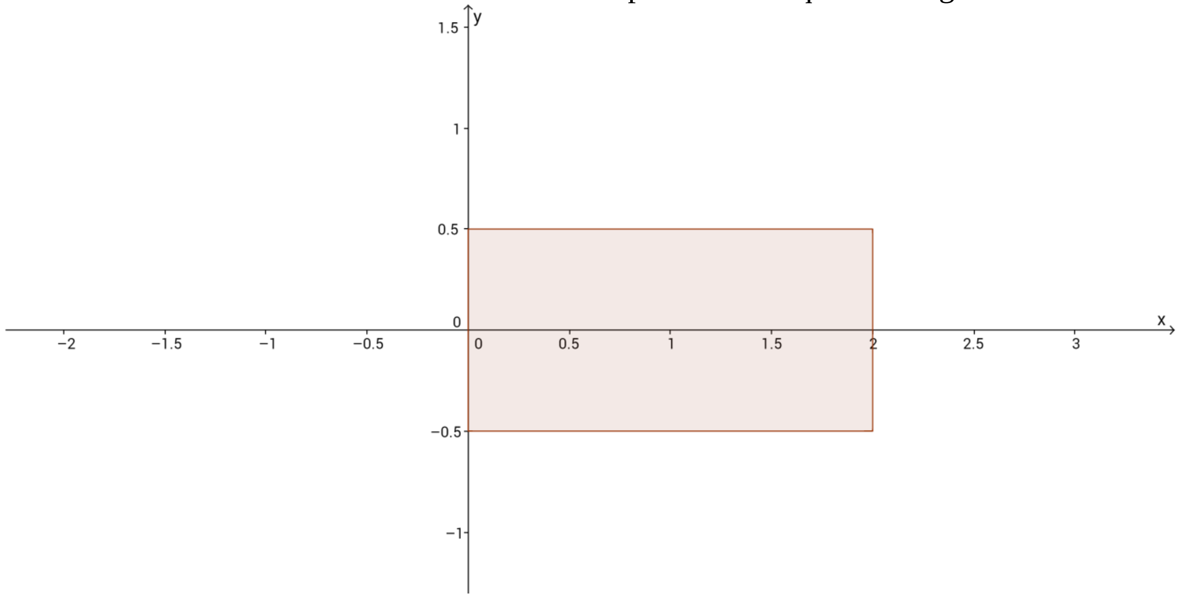
Si calcolino valore atteso e varianza della variabile aleatoria Z=X+Y avendo determinato il valore di K.

SVOLGIMENTO

La funzione di densità di probabilità può essere pensata nel seguente modo:

$$p_{X,Y}(x,y) = K\,|\,y\,|\,\mathrm{rect}_1(y)\,\mathrm{rect}_2(x-1) = \begin{cases} -Ky & -\frac{1}{2} < y < 0,\ 0 < x < 2 \\ Ky & 0 < y < \frac{1}{2},\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

Il dominio di definizione della funzione di densità di probabilità è quindi il seguente:



La funzione di densità di probabilità fornita deve rispettare la proprietà di normalizzazione, ovvero il suo integrale esteso a tutto il dominio di definizione deve essere pari ad 1. Si ha pertanto, sulla base degli intervalli di definizione per x e y:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^2\left[\int_{-\frac{1}{2}}^{0} -Kydy + \int_0^{\frac{1}{2}} Kydy\right]dx = \int_0^2\left[-\frac{K}{2}\left[y^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{K}{2}\left[y^2\right]_0^{\frac{1}{2}}\right]dx = \int_0^2\left[\frac{K}{8}+\frac{K}{8}\right]dx = \frac{K}{2} = 1$$

Da cui si deduce che K=2. Di conseguenza

$$p_{X,Y}(x,y) = 2\,|\,y\,|\,\mathrm{rect}_1(y)\,\mathrm{rect}_2(x-1) = \begin{cases} -2y & -\frac{1}{2} < y < 0,\ 0 < x < 2 \\ 2y & 0 < y < \frac{1}{2},\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

Si può dimostrare che X ed Y sono statisticamente indipendenti. Infatti si ha che:

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Y}(x,y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}-2y\cdot rect_2(x-1)dy+\int_0^{\frac{1}{2}}2y\cdot rect_2(x-1)dy=\frac{1}{2}rect_2(x-1)$$

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^2 2|y|rect_1(y)\,dx=4|y|rect_1(y)$$

$$p_{X,Y}(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=2|y|rect_1(y)rect_2(x-1)$$

La variabile aleatoria Z è ottenuta tramite la trasformazione Z=X+Y, con X e Y statisticamente indipendenti. Per quanto riguarda il valore atteso quindi si ha:

$$m_z=E_z\{z\}=E_{XY}\{x+y\}=m_x+m_y$$

$$m_x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}rect_2(x-1)dx=\int_0^2\frac{x}{2}dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2=1$$

$$m_y=\int_{-\infty}^{+\infty}y\cdot 4|y|rect_1(y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}-4y^2dy+\int_0^{\frac{1}{2}}4y^2dy=-4\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+4\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}=0$$

$$m_z=m_x+m_y=1$$

Per la varianza si ottiene invece:

$$\sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2$$

$$\sigma_x^2=m_x^{(2)}-m_x^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}rect_2(x-1)dx-1=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx-1=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$$

$$\sigma_y^2=m_y^{(2)}-m_y^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2\cdot 4|y|rect_1(y)dy=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}-4y^3dy+\int_0^{\frac{1}{2}}4y^3dy=\left[-y^4\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}+\left[y^4\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$$

$$\sigma_z^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$$

ESERCIZIO 37 [ESAME DEL 9/07/2004]

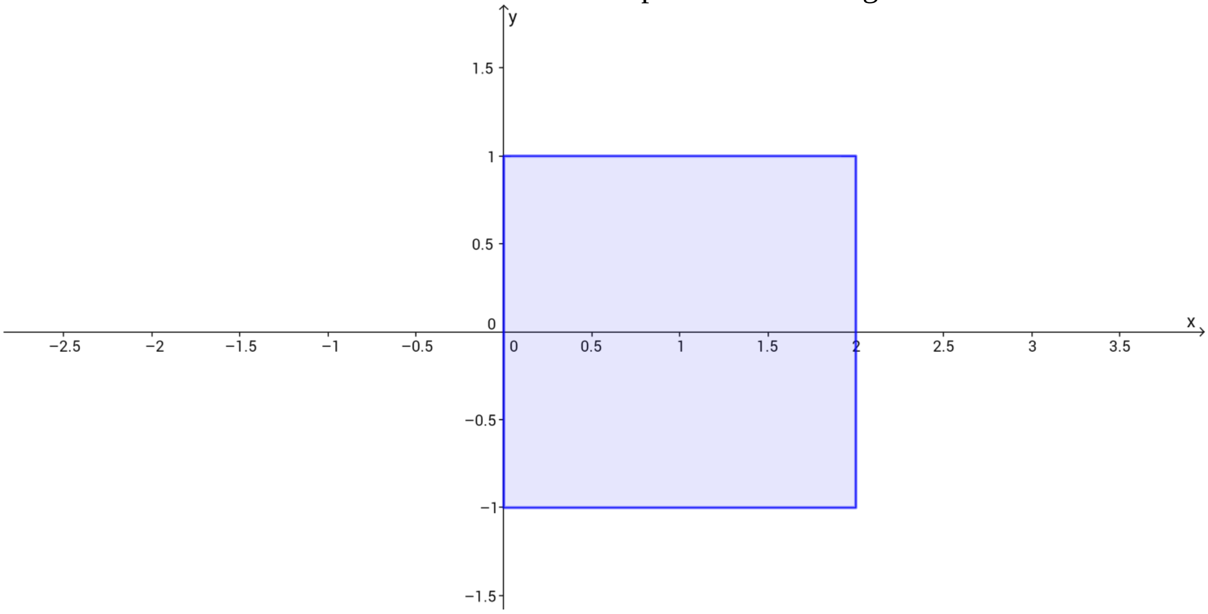
Sia data la variabile aleatoria bidimensionale (X,Y) con densità di probabilità

$$p_{X,Y}(x,y) = \alpha(1-y)\,\mathrm{rect}_2(x-1)\,\mathrm{rect}_2(y)$$

Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile Z=Y-2X, avendo calcolato il valore di α.

SVOLGIMENTO

Il dominio di definizione della funzione di densità di probabilità è il seguente:



La funzione di densità di probabilità fornita deve rispettare la proprietà di normalizzazione, ovvero il suo integrale esteso a tutto il dominio di definizione deve essere pari ad 1. Si ha pertanto, sulla base degli intervalli di definizione per x e y:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^2\left[\int_{-1}^{1}\alpha(1-y)\,dy\right]dx = \alpha\int_0^2\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1}dx = 2\alpha\int_0^2 dx = 4\alpha = 1$$

Da cui si deduce che $\alpha = \frac{1}{4}$. Di conseguenza

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}(1-y)\,\mathrm{rect}_2(x-1)\,\mathrm{rect}_2(y)$$

Si può dimostrare che X ed Y sono statisticamente indipendenti. Infatti si ha che:

$$p_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1-y)\,\mathrm{rect}_2(x-1)\,dy = \frac{1}{4}\mathrm{rect}_2(x-1)\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\mathrm{rect}_2(x-1)$$

$$p_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^2\frac{1}{4}(1-y)\,\mathrm{rect}_2(y)\,dx = \frac{1}{2}(1-y)\,\mathrm{rect}_2(y)$$

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)\,p_Y(y) = \frac{1}{4}(1-y)\,\mathrm{rect}_2(x-1)\,\mathrm{rect}_2(y)$$

La variabile aleatoria Z è ottenuta tramite la trasformazione Z=-2X+Y, con X e Y statisticamente indipendenti. Per quanto riguarda il valore atteso quindi si ha:

$$m_z = E_Z\{z\} = E_{X,Y}\{-2x + y\} = -2m_x + m_y$$

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2}\mathrm{rect}_2(x-1)dx = \int_0^2 \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1$$

$$m_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \frac{1}{2}(1-y)\,\mathrm{rect}_2(y)dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(y - y^2)dy = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$m_z = -2m_x + m_y = -2 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$$

Mentre per la varianza, poiché x e y sono statisticamente indipendenti, si ottiene che:

$$\sigma_z^2 = \sum_i^2 a_i^2 \sigma_{X_i}^2 = 4\sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

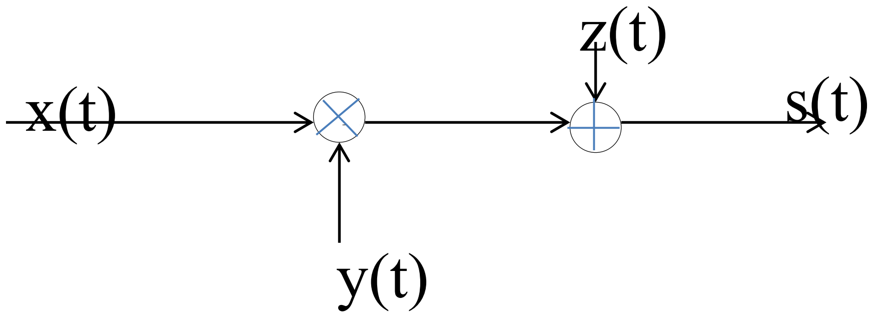
$$\sigma_x^2 = m_x^{(2)} - m_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}\mathrm{rect}_2(x-1)dx - 1 = \int_0^2 \frac{x^2}{2}dx - 1 = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_y^2 = m_y^{(2)} - m_y^2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot (1-y)\,\mathrm{rect}_2(y)\,dy - \frac{1}{9} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}(y^2 - y^3)\,dy - \frac{1}{9} = \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\sigma_z^2 = 4\sigma_x^2 + \sigma_y^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{9} = \frac{14}{9}$$

ESERCIZIO 38 [ESAME DEL 13/07/2005]

Si consideri lo schema in figura, ove X(t), Y(t) e Z(t) sono tre processi aleatori mutuamente statisticamente indipendenti.



Sia X(t) un processo gaussiano ergodico a valor atteso nullo ($m_X = 0$) e funzione di covarianza $K_X(\tau) = 16 \cdot e^{-3|\tau|}$, Y(t) un processo armonico, ergodico con ampiezza A=50 e $f_p = 20$ MHz, Z(t) un processo gaussiano ergodico a valor atteso nullo ($m_Z = 0$) e funzione di covarianza $K_Z(\tau) = 25 \cdot tri_4(\tau)$. Si calcoli lo spettro di densità di potenza di S(t).

SVOLGIMENTO

Considerando i processi X(t), Y(t) e Z(t), date le realizzazioni x(t), y(t) e z(t) il segnale s(t) è ottenuto come:

$$s(t) = x(t) \cdot y(t) + z(t)$$

Lo spettro di densità di potenza del processo S(t) è pari alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione di una realizzazione del processo:

$$P_S(f) = F\{p_{SS}(\tau)\}$$

Poiché X(t), Y(t) e Z(t) sono processi ergodici, anche S(t) sarà un processo ergodico. Per la funzione di autocorrelazione si ha:

$$p_{SS}(\tau) = \overline{s(t) \cdot s(t+\tau)}^t = \overline{[x(t) \cdot y(t) + z(t)] \cdot [x(t+\tau) \cdot y(t+\tau) + z(t+\tau)]}^t =$$

$$= \overline{x(t)\, x(t+\tau) \cdot y(t)\, y(t+\tau) + x(t) \cdot y(t) \cdot z(t+\tau) + z(t) \cdot x(t+\tau) \cdot y(t+\tau) + z(t) \cdot z(t+\tau)}^t =$$

$$= \overline{x(t)\, x(t+\tau) \cdot y(t)\, y(t+\tau)}^t + \overline{x(t) \cdot y(t) \cdot z(t+\tau)}^t + \overline{z(t) \cdot x(t+\tau) \cdot y(t+\tau)}^t + \overline{z(t) \cdot z(t+\tau)}^t$$

Tenendo conto dell'ergodicità e dell'indipendenza statistica dei processi si ha che:

$$p_{SS}(\tau) = \overline{x(t)\, x(t+\tau) \cdot y(t)\, y(t+\tau)}^t + \overline{x(t) \cdot y(t) \cdot z(t+\tau)}^t + \overline{z(t) \cdot x(t+\tau) \cdot y(t+\tau)}^t + \overline{z(t) \cdot z(t+\tau)}^t =$$

$$= p_{XX}(\tau) \cdot p_{YY}(\tau) + p_{ZZ}(\tau) + 2 m_X m_Y m_Z = p_{XX}(\tau) \cdot p_{YY}(\tau) + p_{ZZ}(\tau)$$

Per quanto riguarda le funzioni di autocorrelazione di x(t) e z(t) si ha:

$$K_X(\tau) = p_{XX}(\tau) - m_X^2 = p_{XX}(\tau) \quad \rightarrow p_{XX}(\tau) = 16 \cdot e^{-3|\tau|}$$

$$K_Z(\tau) = p_{ZZ}(\tau) - m_Z^2 = p_{ZZ}(\tau) \quad \rightarrow p_{ZZ}(\tau) = 25 \cdot tri_4(\tau)$$

Per quanto riguarda y(t), essendo Y(t) un processo armonico si ha che:

$$p_{YY}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_p \tau) = 1250 \cdot \cos(2\pi f_p \tau)$$

con $f_p = 20$ MHz. Quindi lo spettro di densità di potenza di S(t) risulterà pari a:

$$P_S(f) = F\{p_{SS}(\tau)\} = F\{p_{XX}(\tau) \cdot p_{YY}(\tau) + p_{ZZ}(\tau)\} = P_X(f) * P_Y(f) + P_Z(f)$$

$$P_X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}16\cdot e^{-3|\tau|}\,e^{-j2\pi f\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{0}16\cdot e^{3\tau}\,e^{-j2\pi f\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}16\cdot e^{-3\tau}\,e^{-j2\pi f\tau}d\tau=16\int_{-\infty}^{0}e^{(3-j2\pi f)\tau}\,d\tau+16\int_{0}^{\infty}e^{-(3+j2\pi f)\tau}\,d\tau=$$

$$=\frac{16}{3-j\cdot 2\pi f}\left[e^{(3-j2\pi f)\tau}\right]_{-\infty}^{0}-\frac{16}{3+j\cdot 2\pi f}\left[e^{-(3+j2\pi f)\tau}\right]_{0}^{+\infty}=\frac{16}{3-j\cdot 2\pi f}+\frac{16}{3+j\cdot 2\pi f}=\frac{16\cdot(3-j\cdot 2\pi f)+16\cdot(3+j\cdot 2\pi f)}{9+4\pi^2 f^2}\Rightarrow$$

$$P_X(f)=\frac{96}{9+4\pi^2 f^2}$$

$$P_Y(f)=625\cdot\left\{u_0(f-f_p)+u_0(f-f_p)\right\}$$

$$P_Z(f)=100\cdot Ca^2(4\pi f)$$

In conclusione:

$$P_S(f)=P_X(f)*P_Y(f)+P_Z(f)=\frac{60000}{9+4\pi^2 f^2}*\left\{u_0(f-f_p)+u_0(f-f_p)\right\}+100\cdot Ca^2(4\pi f)=$$

$$=\frac{60000}{9+4\pi^2(f-f_p)^2}+\frac{60000}{9+4\pi^2(f+f_p)^2}+100\cdot Ca^2(4\pi f)$$

ESERCIZIO 39 [ESAME DEL 13/02/2006]

Data la non linearità

$$y = \mathrm{rect}_2(x)$$

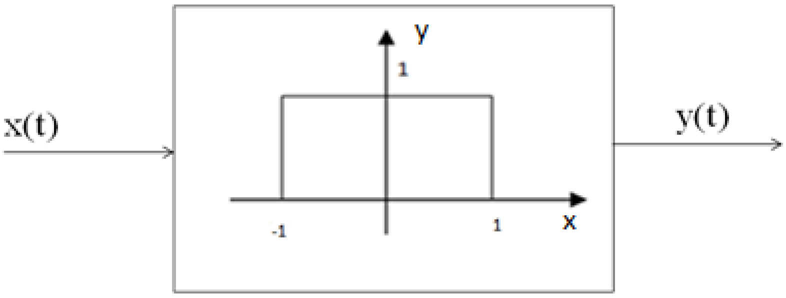
al cui ingresso è applicato il processo armonico ergodico di ampiezza uguale a 2 e frequenza F = 5 KHz, calcolare:

a) La gerarchia di primo ordine del processo di uscita Y(t),

b) L'autocorrelazione del processo d'uscita

SVOLGIMENTO

a) La situazione è la seguente:



Dove x(t) è la realizzazione di un processo armonico: $x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi) = 2 \cdot \cos(10000\pi t + \varphi)$.

La gerarchia del primo ordine di un processo armonico è pari a:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} & -A < x < A \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \rightarrow \quad p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{4 - x^2}} & -2 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La realizzazione del processo armonico è applicata all'ingresso della non linearità:

$$y = \mathrm{rect}_2(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Di conseguenza la gerarchia di ordine 1 del processo Y(t) risulterà pari a:

$$p_Y(y) = \left[\int_{-\infty}^{-1} p_X(x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} p_X(x)\,dx\right] \cdot u_0(y) + \int_{-1}^{+1} p_X(x)\,dx \cdot u_0(y-1) =$$

$$= \left[\int_{-2}^{-1} \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int_{1}^{+2} \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}\,dx\right] \cdot u_0(y) + \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}\,dx \cdot u_0(y-1) =$$

$$= \left\{\left[\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{1}^{2}\right\} \cdot u_0(y) + \left[\frac{1}{\pi}\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{-2}^{-1} \cdot u_0(y-1) \Rightarrow$$

$$p_Y(y) = \frac{2}{3} \cdot u_0(y) + \frac{1}{3} \cdot u_0(y-1)$$

Per quanto riguarda il valor medio e la varianza di Y si ha:

$$m_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot \left[\frac{2}{3}\cdot u_0(y) + \frac{1}{3}\cdot u_0(y-1)\right]dy = \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot u_0(y)dy + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot u_0(y-1)dy = \frac{1}{3}$$

$$m_y^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \left[\frac{2}{3}\cdot u_0(y) + \frac{1}{3}\cdot u_0(y-1)\right]dy = \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot u_0(y)dy + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\cdot u_0(y-1)dy = \frac{1}{3}$$

$$\sigma_y^2 = m_y^{(2)} - {m_y}^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

b) Per calcolare l'autocorrelazione del processo d'uscita si consideri la trasformazione

$$y = rect_2(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Per cui si ha che $y(t) = 1$ per $-1 < x(t) < 1$ ovvero $y(t) = 1$ per $-1 \le 2\cos(10\pi t + \varphi) \le 1$

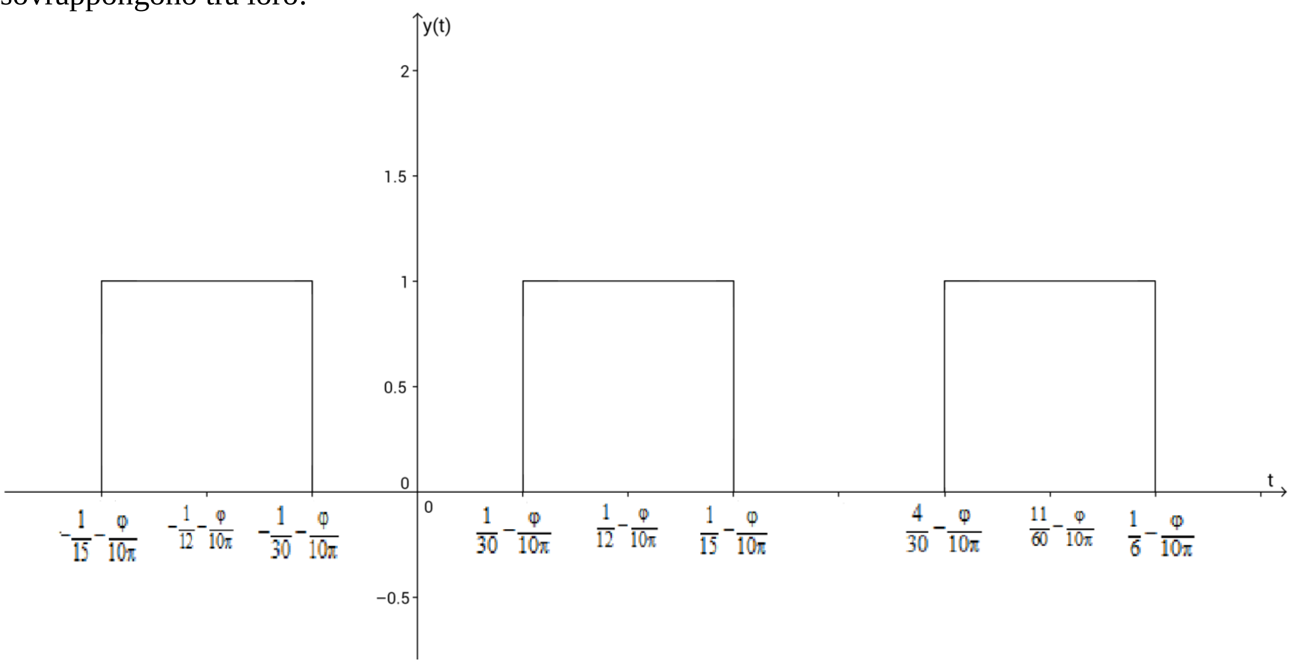
$$-1 \le 2\cos(10\pi t + \varphi) \le 1 \;\; \rightarrow -\frac{1}{2} \le \cos(10\pi t + \varphi) \le \frac{1}{2} \;\; \rightarrow \frac{\pi}{3} + k\pi \le 10\pi t + \varphi \le \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$\rightarrow \frac{1}{30} - \frac{\varphi}{10\pi} + \frac{k}{10} \le t \le \frac{1}{15} - \frac{\varphi}{10\pi} + \frac{k}{10}$$

Di conseguenza il segnale y(t) in uscita dalla non linearità risulterà essere pari a:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} rect_{\frac{1}{30}}\left(t - \frac{1}{20} + \frac{\varphi}{10\pi} - \frac{k}{10}\right)$$

Poiché il processo armonico X(t) è ergodico e, quindi, stazionario, la fase φ risulterà essere uniformemente distribuita in $[-\pi, \pi]$. Di conseguenza la quantità $\frac{\varphi}{10\pi}$ sarà compresa nell'intervallo $-\frac{1}{10} \le \frac{\varphi}{10\pi} \le \frac{1}{10}$ e, quindi, si può concludere che il segnale y(t) è un treno di rect che non si sovrappongono tra loro:



Poiché siamo in presenza di un segnale periodico, l'autocorrelazione del processo d'uscita può essere calcolata nel seguente modo:

$$p_{YY}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |Y_n|^2 e^{j2\pi Fn\tau}$$

Avendo indicato con T il periodo del segnale y(t) , con F la quantità $F = \frac{1}{T}$ e con Y_n i coefficienti di Fourier del segnale y(t) .

Ricordando infine la proprietà di traslazione nel tempo per la serie di Fourier:

$$x(t) \Leftrightarrow X_n$$

$$x(t-\tau) \Leftrightarrow X_n e^{-j2\pi f_n \tau}$$

si possono calcolare i coefficienti di Fourier Y_n a partire dalla versione di y(t) non traslata:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}_{\frac{1}{30}}\left(t - \frac{k}{10}\right)$$

$$X_n = \frac{\Delta}{T} \mathrm{Ca}[n\,\pi F\Delta] = \frac{1}{3}\mathrm{Ca}\left[n\frac{\pi}{3}\right]$$

Il segnale y(t) è ottenuto a partire da x(t) per traslazione di una quantità $\tau = \frac{1}{20} - \frac{\varphi}{10\pi}$, di conseguenza coefficienti dello sviluppo del segnale y(t) risultano essere pari a:

$$Y_n = X_n e^{-j2\pi f_n \tau} = \frac{1}{3}\mathrm{Ca}\left[n\frac{\pi}{3}\right] \cdot e^{-j20\pi n \cdot \left(\frac{1}{20} - \frac{\varphi}{10\pi}\right)} = \frac{1}{3}\mathrm{Ca}\left[n\frac{\pi}{3}\right] \cdot e^{-j\pi n \cdot \left(1 - \frac{2\varphi}{\pi}\right)}$$

In conclusione l'autocorrelazione del segnale y(t) risulterà essere pari a:

$$p_{YY}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |Y_n|^2 e^{j2\pi Fn\tau} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{3}\mathrm{Ca}\left[n\frac{\pi}{3}\right] \cdot e^{-j\pi n \cdot \left(1 - \frac{2\varphi}{\pi}\right)}\right|^2 e^{j20\pi n\tau} = \frac{1}{9}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathrm{Ca}^2\left[n\frac{\pi}{3}\right] \cdot e^{j20\pi n\tau}$$

ESERCIZIO 40 [ESAME DEL 08/06/2004]

Siano X(t) e Y(t) due processi gaussiani, mutuamente statisticamente indipendenti, a valor atteso nullo e funzione di covarianza pari rispettivamente a:

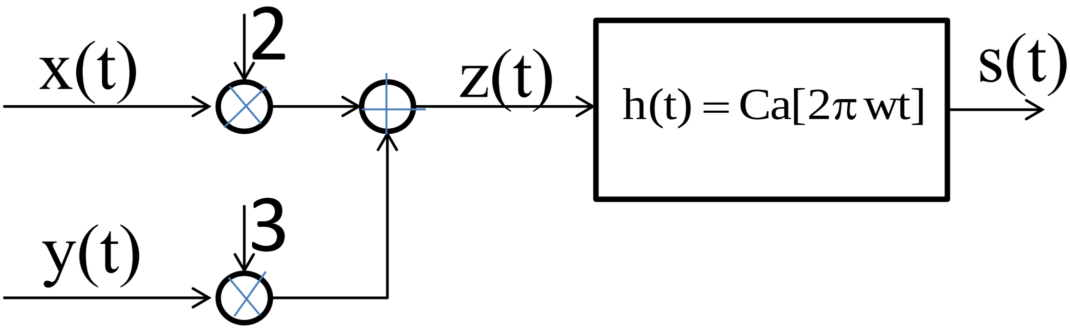
$$k_{XX}(\tau) = Ca^2[2\pi w\tau]$$

$$k_{YY}(\tau) = Ca[2\pi w\tau]$$

Sia Z(t) il processo la cui generica realizzazione è data da Z(t)=2X(t)+3Y(t). Ciò posto si calcoli la gerarchia di ordine 2 del processo S(t) la cui generica realizzazione è data dall'uscita del filtro con risposta impulsiva $h(t) = Ca[2\pi wt]$ quando in ingresso venga applicato z(t).

SVOLGIMENTO

La situazione è la seguente:



Poiché i processi X(t) e Y(t) sono entrambi a valor atteso nullo ($m_X = m_Y = 0$), si ha che

$$p_{XX}(\tau) = k_{XX}(\tau) = Ca^2[2\pi w\tau]$$

$$p_{YY}(\tau) = k_{YY}(\tau) = Ca[2\pi w\tau]$$

Poiché sia X(t) che Y(t) sono gaussiani ed ergodici e poiché le trasformazioni applicate sono lineari si ha che il processo S(t) sarà anch'esso gaussiano ed ergodico. Per quanto riguarda il valore atteso di S(t) si ha:

$$m_Z = 2m_X + 3m_Y = 0 \qquad \Rightarrow m_S = m_Z \cdot H(0) = 0$$

Per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione, ricordando che i processi X(t) e Y(t) sono indipendenti e a valor atteso nullo, si ha:

$$p_{ZZ}(\tau) = \overline{z(t)z(t+\tau)}^{t} = \overline{[2x(t)+3y(t)][2x(t+\tau)+3y(t+\tau)]}^{t} =$$

$$= \overline{4x(t)x(t+\tau)+9y(t)y(t+\tau)+6y(t)x(t+\tau)+6x(t)y(t+\tau)}^{t} = \overline{4x(t)x(t+\tau)}^{t} + \overline{9y(t)y(t+\tau)}^{t} +$$

$$+\overline{6y(t)x(t+\tau)}^{t} + \overline{6x(t)y(t+\tau)}^{t}$$

Ricordando che i processi X(t) e Y(t) sono stazionari si ha:

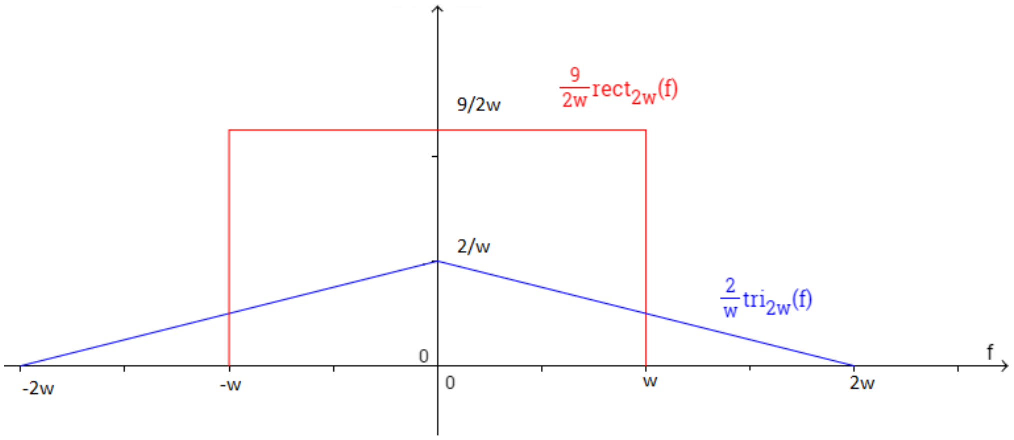
$$p_{ZZ}(\tau) = 4p_{XX}(\tau) + 9p_{YY}(\tau) + 12m_X m_Y = 4Ca^2[2\pi w\tau] + 9Ca[2\pi w\tau]$$

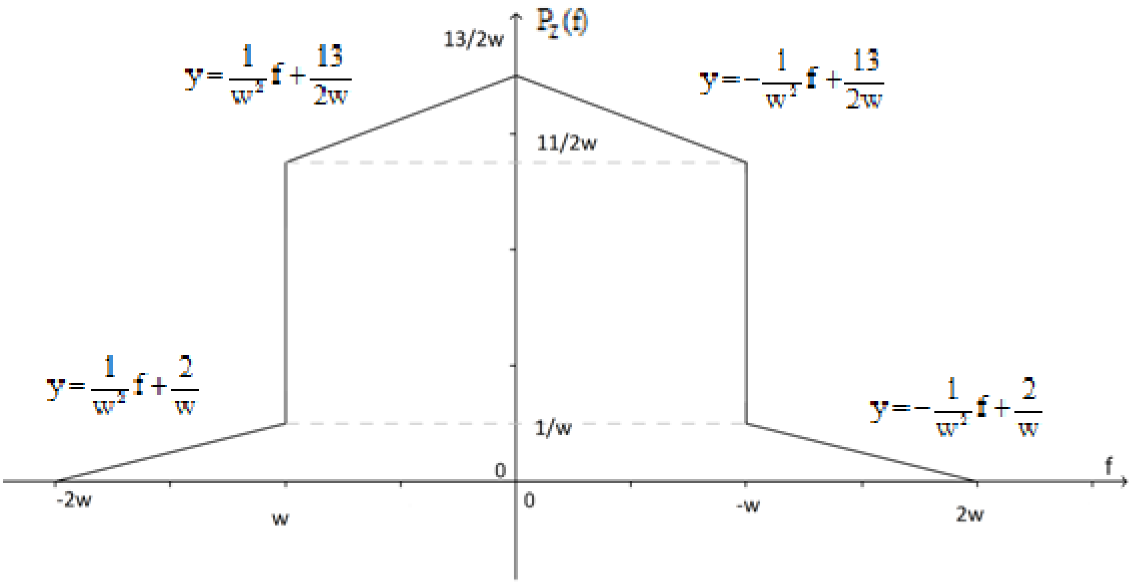
Quindi per il processo S(t) si ha:

$$p_{SS}(\tau) = k_{SS}(\tau) = F^{-1}\left\{P_Z(f)\cdot|H(f)|^2\right\}$$

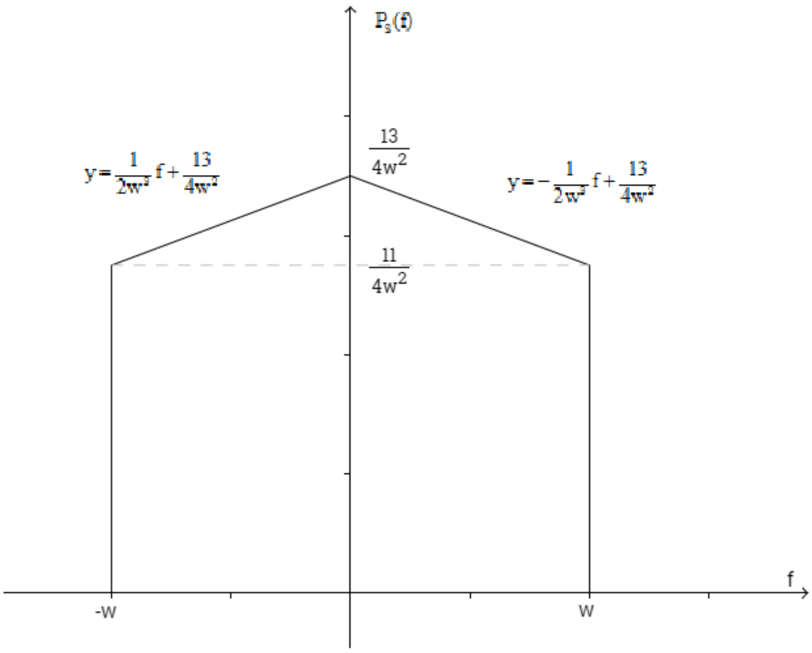
$$h(t) = Ca[2\pi wt] \qquad \rightarrow H(f) = \frac{1}{2w}\text{rect}_{2w}(f)$$

$$p_{ZZ}(\tau)=4Ca^2\left[2\pi w\tau\right]+9Ca\left[2\pi w\tau\right] \quad\rightarrow\quad P_Z(f)=\frac{2}{w}\mathrm{tri}_{2w}(f)+\frac{9}{2w}\mathrm{rect}_{2w}(f)$$





$$P_S(f)=P_Z(f)\cdot|H(f)|^2=P_Z(f)\cdot\frac{1}{2w}\mathrm{rect}_{2w}(f)=\frac{11}{4w^2}\mathrm{rect}_{2w}(f)+\frac{1}{2w^2}\mathrm{tri}_w(f)$$



$$P_S(f)=\frac{11}{4w^2}\operatorname{rect}_{2w}(f)+\frac{1}{2w^2}\operatorname{tri}_w(f) \quad \rightarrow \quad p_{SS}(\tau)=k_{SS}(\tau)=F^{-1}\{P_S(f)\}=\frac{11}{2w}\operatorname{Ca}[2\pi w\tau]+\frac{1}{2w}\operatorname{Ca}^2[\pi w\tau]$$

Per quanto riguarda la varianza di S(t) si ha:

$$\sigma_S^2=p_{SS}(0)=\frac{11}{2w}+\frac{1}{2w}=\frac{6}{w}$$

Poiché sia X(t) che Y(t) sono gaussiani ed ergodici e poiché le trasformazioni applicate sono lineari si ha che il processo S(t) sarà anch'esso gaussiano ed ergodico. La gerarchia di ordine 2 di S(t) sarà pari a:

$$p_{S_1,S_2}(s_1,s_2,\tau)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\det K_S}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[(\underline{s}-\underline{m}_S)^T K_S^{-1}(\underline{s}-\underline{m}_S)\right]}$$

Con $\underline{m}_S=\begin{pmatrix} m_{S_1} \\ m_{S_2}\end{pmatrix}$ e $K_S=\begin{pmatrix}\sigma_{S_1}^2 & k_{1,2} \\ k_{2,1} & \sigma_{S_2}^2\end{pmatrix}$, avendo indicato con $k_{1,2}=\sigma_{S_1,S_2}=m_S^{(1,1)}-m_{S_1}m_{S_2}$ la covarianza.

Nelle precedenti formule con s_1 ed s_2 si sono indicate le realizzazioni delle variabili aleatorie S_1 e S_2 estratte dal processo aleatorio negli istanti di tempo t_1 e t_2. Poiché il processo è stazionario il valore atteso e la varianza non dipendono dall'istante di tempo considerato per cui:

$$m_{S_1}=m_{S_2}=m_S=0$$

$$\sigma_{S_1}^2=\sigma_{S_2}^2=\sigma_S^2=\frac{6}{w}$$

Inoltre

$$k_{1,2}=\sigma_{S_1,S_2}=m_S^{(1,1)}-m_{S_1}m_{S_2}=m_S^{(1,1)}=p_{SS}(\tau)=\frac{11}{2w}\operatorname{Ca}[2\pi w\tau]+\frac{1}{2w}\operatorname{Ca}^2[\pi w\tau]$$

Per cui

$$K_S = \begin{pmatrix} \sigma_{S_1}^2 & k_{1,2} \\ k_{2,1} & \sigma_{S_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{w} & \frac{11}{2w}Ca[2\pi w\tau] + \frac{1}{2w}Ca^2[\pi w\tau] \\ \frac{11}{2w}Ca[2\pi w\tau] + \frac{1}{2w}Ca^2[\pi w\tau] & \frac{6}{w} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{w}\begin{pmatrix} 6 & \frac{11}{2}Ca[2\pi w\tau] + \frac{1}{2}Ca^2[\pi w\tau] \\ \frac{11}{2}Ca[2\pi w\tau] + \frac{1}{2}Ca^2[\pi w\tau] & 6 \end{pmatrix}$$

In conclusione la gerarchia di ordine 2 di Y(t) sarà pari a:

$$p_{S_1,S_2}(s_1, s_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det K_S}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left[(\underline{s}-\underline{m}_S)^T K_S^{-1}(\underline{s}-\underline{m}_S)\right]}$$

Con

$$\det(K_S) = \frac{1}{w^2}\cdot\left(36 - \left[\frac{11}{2}Ca[2\pi w\tau] + \frac{1}{2}Ca^2[\pi w\tau]\right]^2\right)$$

$$K_Y^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{w^2}\cdot\left(36 - \left[\frac{11}{2}Ca[2\pi w\tau] + \frac{1}{2}Ca^2[\pi w\tau]\right]^2\right)} \cdot \begin{pmatrix} \frac{6}{w} & -\frac{11}{2w}Ca[2\pi w\tau] - \frac{1}{2w}Ca^2[\pi w\tau] \\ -\frac{11}{2w}Ca[2\pi w\tau] - \frac{1}{2w}Ca^2[\pi w\tau] & \frac{6}{w} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 41 [ESAME DEL 29/09/2007]

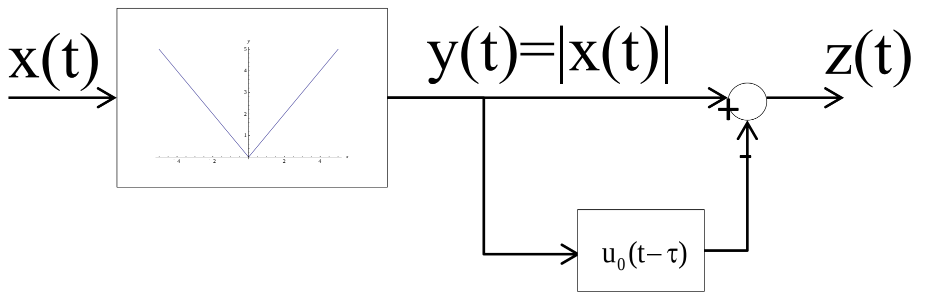
Data la non linearità istantanea y(t)=|x(t)|, ove x(t) è una rappresentazione di un processo ergodico gaussiano caratterizzato dallo spettro di densità di potenza

$$P_X(f) = \frac{1}{2w}\,\mathrm{rect}_{2w}(f)$$

Calcolare il valore atteso e la varianza di $z(t) = y(t) - y(t+\tau)$ essendo $\tau = 1/w$.

SVOLGIMENTO

La situazione è la seguente:



La realizzazione y(t) è ottenuta tramite la trasformazione y(t)=|x(t)|, ovvero

$$y = f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ -x & x > 0 \end{cases}$$

Il processo X(t) è un processo gaussiano per cui la gerarchia di ordine 1 del processo risulterà essere pari a:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\, e^{-\left(\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_X^2}\right)}$$

Poiché lo spettro di densità di potenza $P_X(f)$ non contiene impulsi nell'origine, si deduce che il valore atteso di x(t) è nullo: $m_x = 0$

Inoltre si ha che

$K_{XX}(\tau) = p_{XX}(\tau) - m_X^2 = p_{XX}(\tau) = F^{-1}\{P_X(f)\} = \mathrm{Ca}[\pi 2 w \tau]$

Infine quanto riguarda la varianza si ha

$\sigma_X^2 = m_X^{(2)} - m_X^2 = m_X^{(2)} = P_X = p_{XX}(0) = 1$

La densità di probabilità della variabile aleatoria monodimensionale X (gerarchia di ordine 1) estratta dal processo X(t) in un generico istante risulta quindi essere pari a:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Attraverso la trasformazione y=f(x) è possibile ottenere la gerarchia di ordine 1 del processo Y(t). In particolare ricordando che $p_Y(y)=\sum_{i=1}^{n} p_X\left[g_i(y)\right]\cdot\left|\frac{dg_i(y)}{dy}\right|$, indicando con $g_i(y)$ le funzioni inverse dei tratti della funzione f(x) si ha:

$$f_1(x)=x \quad \rightarrow g_1(y)=y \quad \rightarrow \frac{dg_1(y)}{dy}=1$$

$$f_1(x)=-x \quad \rightarrow g_1(y)=-y \quad \rightarrow \frac{dg_1(y)}{dy}=-1$$

$$p_Y(y)=\sum_{i=1}^{2} p_X\left[g_i(y)\right]\cdot\left|\frac{dg_i(y)}{dy}\right|=p_X[y]+p_X[-y]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$p_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} & y>0\end{cases}$$

Da cui si possono ricavare il valore atteso e la varianza di Y:

$$m_y=\int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y)dy=\int_{0}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{y^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$m_y^{(2)}=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 p_Y(y)dy=\int_{0}^{+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\sigma_y^2=m_y^{(2)}-{m_y}^2=1-\frac{2}{\pi}=\frac{\pi-2}{\pi}$$

Per quanto riguarda il valore atteso della variabile aleatoria z si ha $m_z=\tilde{z}^Z=\overline{y(t)-y(t+\tau)}^t$. Poiché il processo è stazionario si ha che il valore atteso non dipende dall'istante di tempo in cui la variabile aleatoria viene estratta $\left[\overline{y(t+\tau)}^t=\overline{y(t)}^t=m_Y\right]$, e quindi si ha che

$$m_z=m_y-m_y=0$$

Per quanto riguarda la varianza invece si ha:

$$\sigma_Z^2=m_Z^{(2)}-m_Z^2=m_Z^{(2)}$$

Per calcolare la varianza è quindi necessario calcolare il momento di ordine 2 del segnale.

$$m_z^{(2)}=\overline{z^2}^Z=\overline{z^2(t)}^t=\overline{\left[y(t)-y(t+\tau)\right]^2}^t=\overline{y^2(t)}^t+\overline{y^2(t+\tau)}^t-2\overline{y(t)\cdot y(t+\tau)}^t=2m_Y^{(2)}-2\cdot p_{YY}(\tau)$$

Per quanto riguarda il secondo termine si ha:

dato che $p_{XX}\left(\tau=\frac{1}{w}\right)=0$

x(t) e x(t+τ) sono incorrelati. Ne segue che anche i rispettivi moduli saranno incorrelati, ovvero:

$$p_{YY}\left(\tau=\frac{1}{w}\right)=0$$

Quindi il momento di ordine 2 della variabile aleatoria z può essere calcolato come:

$$m_z^{(2)}=2m_y^{(2)}=2$$

In conclusione $\sigma_z^{(2)}=m_z^{(2)}=2$