



FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSI DI STUDIO IN INGEGNERIA ELETTRONICA

Corso di

TEORIA DEI SEGNALI

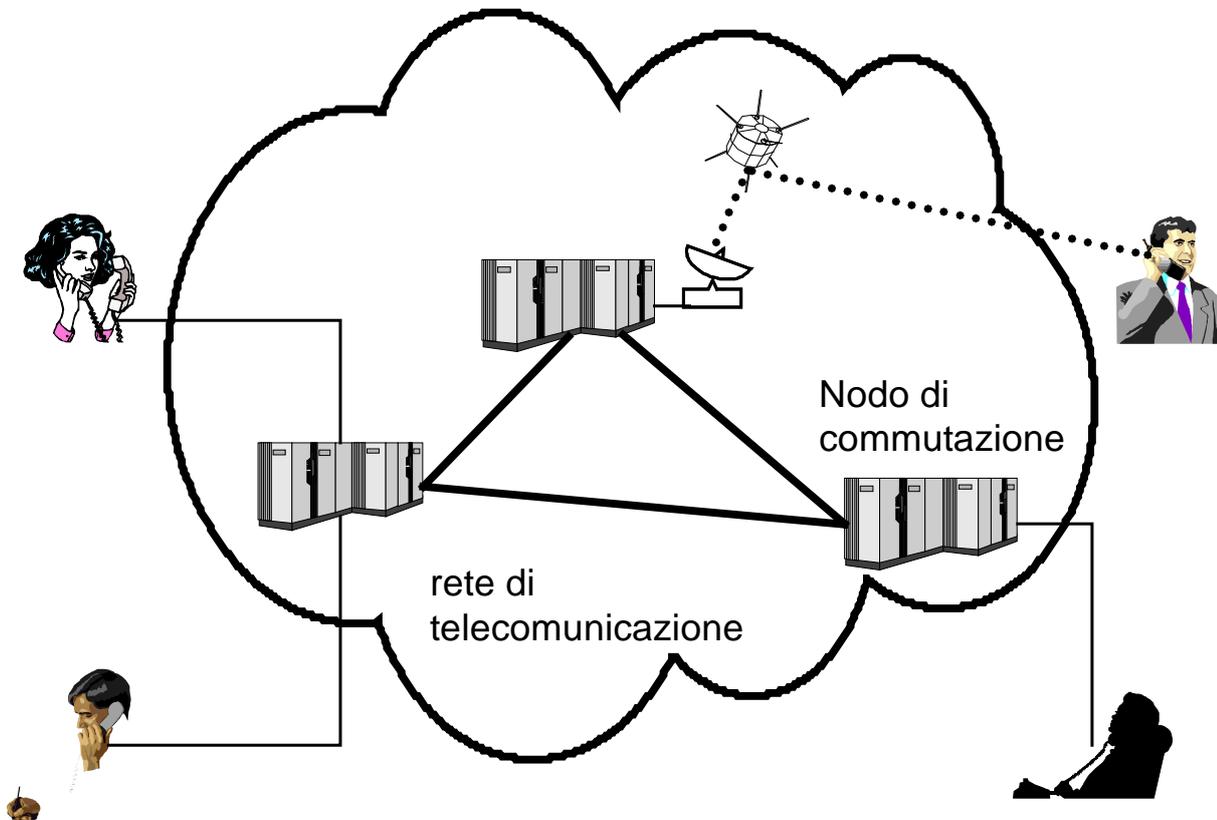
Materiale a cura dei

Proff. Patrizio Campisi e Alessandro Neri

WEB:

http://biomedia4n6.uniroma3.it/teaching/teoria_dei_segnali.html

SERVIZI DI TELECOMUNICAZIONE

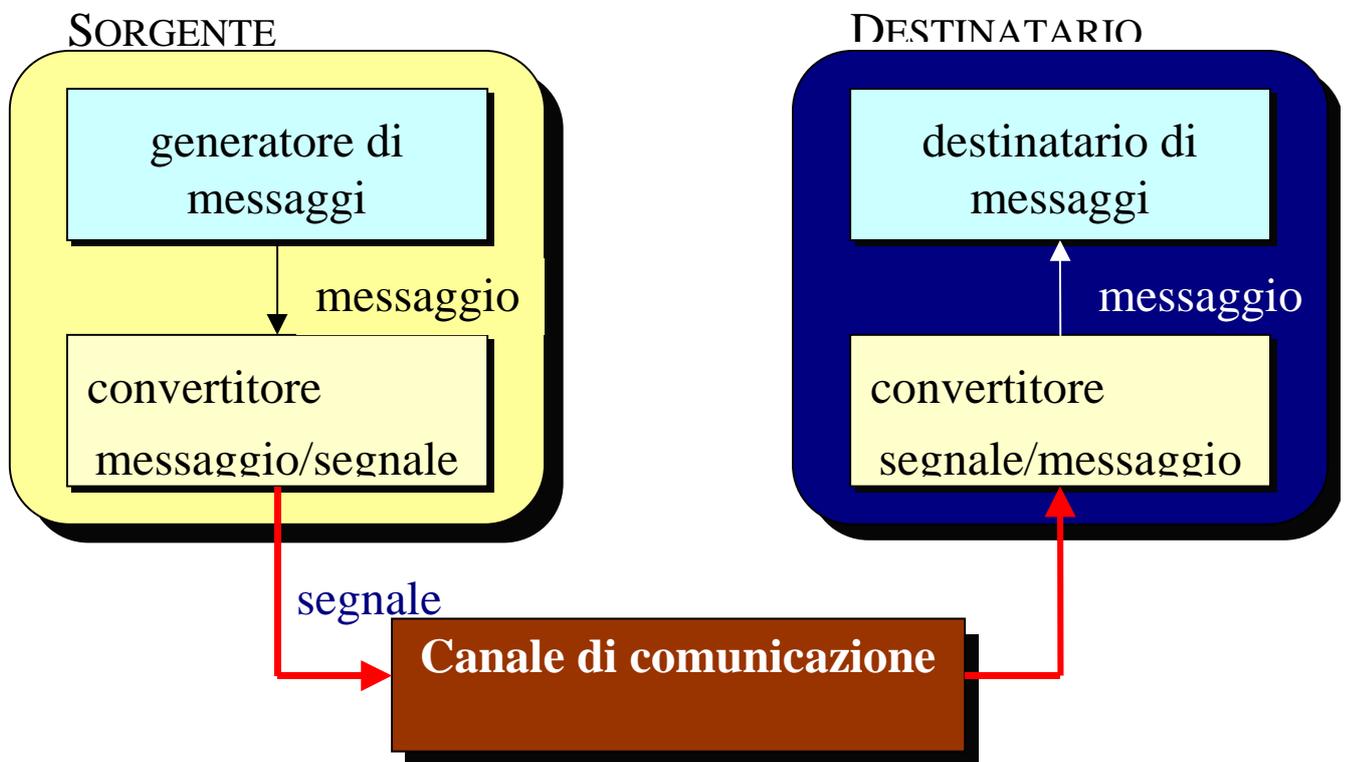


- ❑ Obiettivo primario di un servizio di telecomunicazione è il trasferimento dell'informazione emessa da una sorgente agli utilizzatori a cui essa è rivolta, nell'ambito di una particolare applicazione.
- ❑ Il trasferimento richiede l'accesso da parte degli utenti ad **una rete di telecomunicazione** intesa come il complesso di mezzi che, attraverso le risorse tecniche ed operative necessarie, consente ai suoi utenti il trasferimento dell'informazione.

LA COMUNICAZIONE

➤ Nello studio dei sistemi di telecomunicazione si è soliti fare riferimento a tre entità fondamentali:

1. il **MESSAGGIO**, che rappresenta l'oggetto della comunicazione
2. la **SORGENTE** del messaggio
3. il **DESTINATARIO** del messaggio



➤

In generale nel modellare il comportamento della sorgente si possono individuare due momenti concettualmente distinti:

1. La formulazione del messaggio da trasmettere e l'individuazione del destinatario.
2. La concretizzazione del messaggio astratto in una forma fisica adeguata affinché possa pervenire al destinatario: il **SEGNALE**.

FORMA D'ONDA

- La descrizione più naturale di un **segnale** è costituita dalla funzione matematica che descrive l'andamento della grandezza fisica che fa da supporto al messaggio in funzione del tempo, dello spazio o dello spazio-tempo. Tale funzione prende il nome di **forma d'onda**.
- Sebbene il riferimento a grandezze fisiche faccia presupporre che il codominio della forma d'onda debba essere costituito dall'insieme \mathbf{R} dei numeri reali, è conveniente prendere in considerazione funzioni complesse.

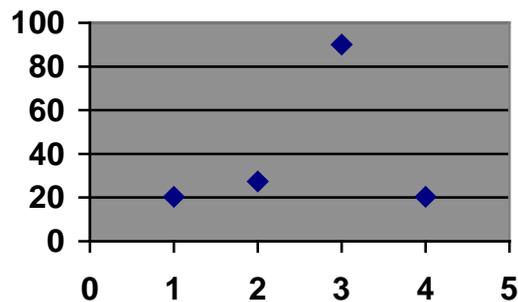
➤ **Def.:** Preso un sottinsieme $T \subseteq \mathbf{R}^m$ dello spazio euclideo a m dimensioni, che denota l'intervallo d'interesse, si definisce **forma d'onda** del segnale $x(t)$ la funzione complessa

$$X : T \rightarrow \mathbf{C}^n$$

Nel seguito, laddove non sia esplicitamente specificato, si supporrà $m=1$ e $n=1$.

SEGNALI TEMPO DISCRETO E TEMPO CONTINUO

Def.: Si definisce **segnale tempo discreto** un segnale tale che T sia una sequenza numerabile di istanti di tempo $\{t_1, t_2, \dots, t_N, \dots\}$.

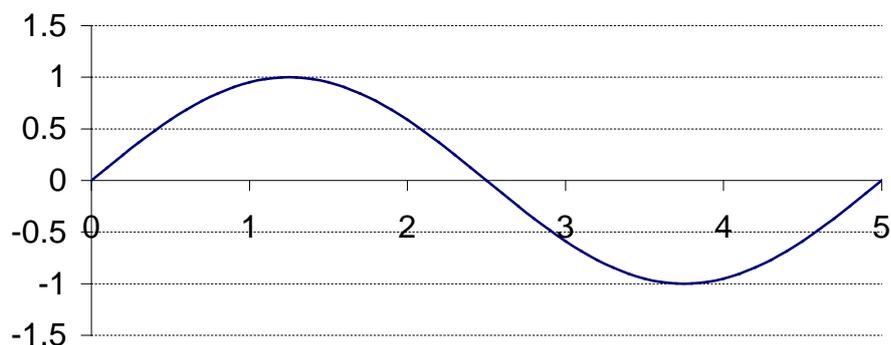


□ *Notazione per segnali tempo discreto:*

$$x[k] = x(t_k)$$

Gli istanti di tempo non devono essere necessariamente equispaziati. Inoltre non si fa riferimento alla durata degli intervalli tra gli istanti di tempo, cosicché non si può fare riferimento all'aspetto dinamico del segnale (e.g. velocità di variazione di un segnale).

Def.: Si definisce **segnale tempo continuo** un segnale $x(t)$ tale che T sia un intervallo di \mathbf{R} .



RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI SEGNALI

□ *Scopo:*

individuare un modello matematico che consenta di esprimere in modo semplice ed efficiente le trasformazioni che i segnali subiscono nel transito attraverso i sistemi fisici.

□ L'insieme di tutte le forme d'onda, dotato delle operazioni di somma e prodotto per una costante complessa gode di tutte le proprietà che caratterizzano uno **spazio vettoriale \mathbf{X}** . Infatti

- i. $\forall x(t), \forall y(t) \in \mathbf{X}, x(t) + y(t) \in \mathbf{X}$
- ii. l'operazione di addizione $+$ tra forme d'onda è associativa, commutativa e invertibile
- iii. $\forall \alpha \in \mathbf{C}, \forall x(t) \in \mathbf{X}, \alpha x(t) \in \mathbf{X}$
- iv. $\alpha [x(t) + y(t)] = \alpha x(t) + \alpha y(t)$
- v. $[\alpha + \beta] x(t) = \alpha x(t) + \beta x(t)$
- vi. $\alpha [\beta x(t)] = (\alpha \beta) x(t)$
- vii. $1 x(t) = x(t)$.

□ *vantaggio* della rappresentazione geometrica dei segnali:

possibilità di impiegare il vocabolario ed i risultati della geometria nello studio dei problemi di comunicazione.

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI SEGNALI

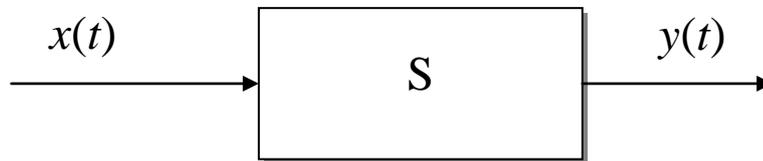
○ *Esempio*

Si consideri un segnale tempo discreto $x[k]$ il cui dominio sia costituito da un insieme finito di istanti di tempo $\{t_1, t_1, \dots, t_N\}$.

Indipendentemente da ciò che essi rappresentano, gli N numeri complessi $x[1], x[2], \dots, x[k], \dots, x[N]$ possono essere sempre pensati come le coordinate di un punto nello spazio N -dimensionale.

□ In essenza, si sostituisce un'entità complessa, **il segnale**, in un ambiente semplice con un'entità semplice, **il vettore**, in un ambiente complesso.

TRANSITO ATTRAVERSO UN SISTEMA FISICO



Siano:

- $x(t)$: segnale d'ingresso rappresentante l'eccitazione del sistema,
- S : blocco funzionale relativo al sistema in esame,
- $y(t)$: segnale d'uscita o risposta all'eccitazione $x(t)$,
- X : spazio vettoriale a cui appartiene $x(t)$,
- Y : spazio vettoriale a cui appartiene $y(t)$.

L'azione del sistema S può essere modellata come una trasformazione

$$H : X \rightarrow Y$$

ovvero come una regola che associa ad ogni elemento $x(t)$ di X un unico elemento $y(t)$ dello spazio Y .

TRASFORMAZIONI LINEARI

➤ **Def.:** Una trasformazione H si dice lineare se e solo se

$$\begin{aligned} H[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] &= a_1H[x_1(t)] + a_2 H[x_2(t)] \\ &= a_1y_1(t) + a_2 y_2(t) \end{aligned}$$

comunque si prendano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ ed i due numeri complessi a_1 e a_2 ; $y_1(t)$ e $y_2(t)$ rappresentano il risultato della trasformazione applicata rispettivamente a $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

□ In generale, l'applicazione successiva della proprietà espressa dalla definizione precedente consente di scrivere, per N finito,

$$H \left[\sum_{i=1}^N a_i x_i(t) \right] = \sum_{i=1}^N a_i H[x_i(t)].$$

□ In generale non è detto che la precedente proprietà sussista qualora si consideri la somma di un'infinità numerabile o non numerabile di elementi, in quanto la proprietà di linearità non implica di per sé la commutatività delle operazioni di trasformazione e di serie, ovvero di somma integrale.

Quando ciò accade si dice che la trasformazione è lineare in senso esteso.

SISTEMI LINEARI

- **Def.:** Una trasformazione H si dice **lineare in senso esteso** se e solo se

$$H \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i(t) \right] = \sum_{i=1}^{\infty} a_i H[x_i(t)]$$

ovvero

$$H \left[\int a(\sigma) x(t, \sigma) d\sigma \right] = \int a(\sigma) H[x(t, \sigma)] d\sigma.$$

- **Def.:** Un sistema S si dice lineare se la trasformazione H ad esso associata è lineare in senso esteso.

□ Poiché in uno spazio vettoriale è sempre possibile trovare una base tale che ciascun elemento dello spazio possa essere espresso come combinazione lineare degli elementi che costituiscono la base, la proprietà di linearità consente di scrivere in modo rapido il legame che esiste tra l'ingresso e l'uscita una volta noto (ovvero misurato) il comportamento del sistema quando al suo ingresso vengono applicati i segnali che costituiscono la base.

SISTEMI LINEARI E PERMANENTI

□ La descrizione del comportamento di un sistema lineare si semplifica ulteriormente se il suo comportamento è invariante rispetto alle traslazioni temporali.

➤ **Def.:** Un sistema S si dice **permanente**, o **invariante rispetto alle traslazioni temporali**, o **invariante nel tempo**, se ad una traslazione temporale t_0 dell'eccitazione $x(t)$ corrisponde un'uguale traslazione della risposta $y(t)$, ovvero

$$H[x(t - t_0)] = y(t - t_0), \quad \forall t_0 \in T, \quad \forall x(t) \in X$$

avendo posto $y(t) = H[x(t)]$

□ In tal caso l'adozione di particolari basi di rappresentazione i cui elementi siano ottenibili per traslazione di una funzione elementare $w(t)$ consente di scrivere il generico segnale $x(t)$ come:

$$x(t) = \int a(\tau) w(t - \tau) d\tau$$

Di conseguenza l'uscita corrispondente sarà pari a

$$y(t) = \int a(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

essendo $h(t)$ l'uscita corrispondente alla funzione elementare $w(t)$.

SISTEMI LINEARI E PERMANENTI A TEMPO DISCRETO

- Dato un segnale reale tempo discreto con T costituito da N istanti di tempo $\{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}\}$, siano

$$x[0], x[1], x[2], \dots, x[n], \dots, x[N-1]$$

i valori assunti dal segnale nei corrispondenti istanti di tempo e sia

$$\mathbf{x} = (x[0] \ x[1] \ x[2] \ \dots \ x[n] \ \dots \ x[N-1])^T$$

il vettore dello spazio N -dimensionale associato al segnale.

- Consideriamo la base dello spazio \mathbf{R}^N costituita dalle N -uple

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 0)$$

.....

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 1 \ \dots \ 0)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{N-1} = (0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ \dots \ 1)$$

- Ogni elemento di tale spazio può essere espresso come combinazione lineare dei vettori costituenti la base:

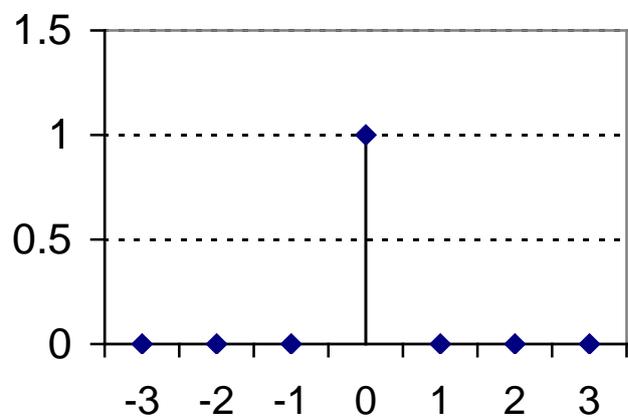
$$\mathbf{x} = x[0] \boldsymbol{\varepsilon}_0 + x[1] \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \dots + x[n] \boldsymbol{\varepsilon}_n + \dots + x[N-1] \boldsymbol{\varepsilon}_{N-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \boldsymbol{\varepsilon}_n$$

SISTEMI LINEARI A TEMPO DISCRETO

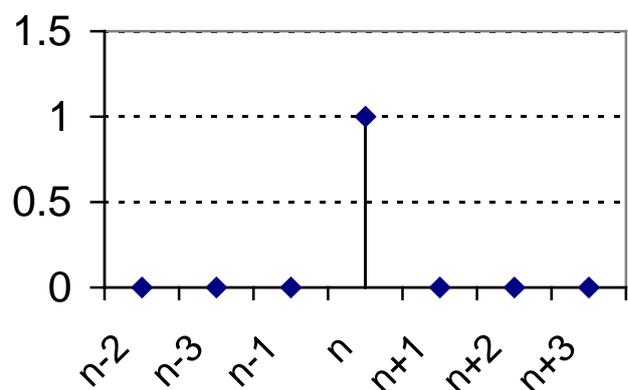
In termini di segnali al vettore ϵ_0 corrisponde il segnale tempo discreto, indicato nel seguito con $u_0[k]$, e noto in letteratura con il termine di **impulso a tempo discreto**, che assume il valore 1 per $k=0$ e 0 altrove

$$u_0[k] = \begin{cases} 1 & \text{per } k = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

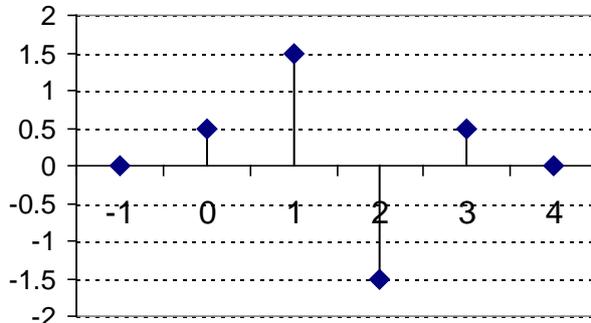


Ogni altro elemento della base può essere ottenuto per traslazione temporale di $u_0[k]$.

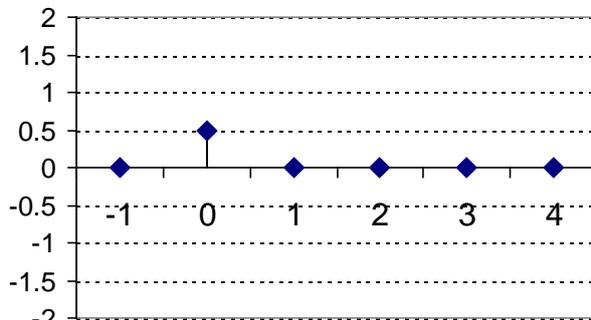
Ad esempio l'elemento corrispondente a ϵ_n è pari a $u_0[k-n]$



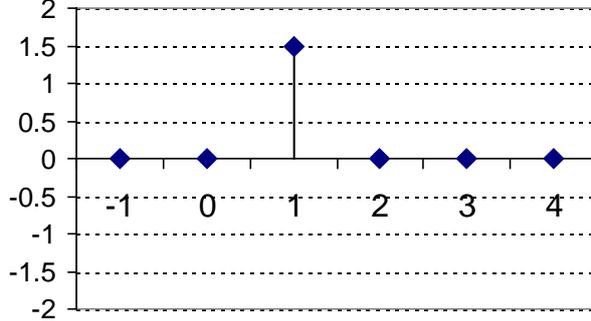
SISTEMI LINEARI A TEMPO DISCRETO



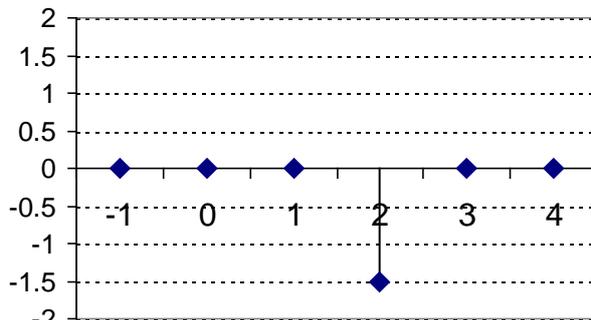
$$x[k] =$$



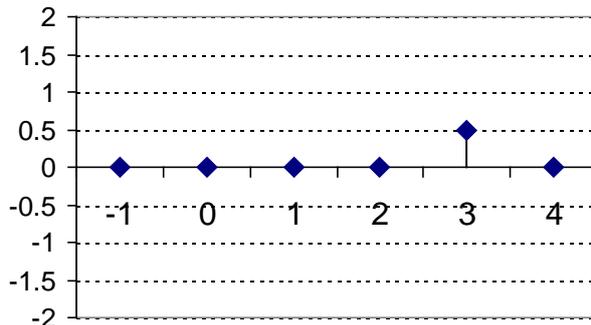
$$x[0]u_0[k] +$$



$$+ x[1]u_0[k-1] +$$



$$+ x[2]u_0[k-2] +$$



$$+ x[3]u_0[k-3]$$

RISPOSTA IMPULSIVA

○ Dato un segnale a tempo discreto per esso vale la seguente rappresentazione in termini di impulsi a tempo discreto

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]u_0[k-n] \quad (1)$$

○ dato un sistema lineare e permanente a tempo discreto, sia $h[k]$ la risposta del sistema quando venga applicato in ingresso $u_0[k]$:

$$u_0[k] \xrightarrow{S} h[k]$$

che prende il nome di **risposta impulsiva**.

Per l'invarianza nel tempo del sistema, la risposta all'impulso $u_0[k-n]$ traslato in n , sarà pari a $h[k]$ traslata della stessa quantità, ovvero a $h[k-n]$:

$$u_0[k-n] \xrightarrow{S} h[k-n] \quad (2)$$

pertanto per la linearità del sistema, dalle (1) e (2) ne consegue che l'uscita $y[k]$ corrispondente all'ingresso $x[k]$ varrà:

$$y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n]$$

CONVOLUZIONE DISCRETA

- L'operatore che lega l'uscita del sistema all'ingresso e alla risposta impulsiva prende il nome di **somma di convoluzione del sistema**, ovvero di **convoluzione discreta** e sarà indicato nel seguito con il simbolo *

$$\begin{aligned} y[k] &= x[k] * h[k] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h[k-n] \end{aligned}$$

- Si osservi che per calcolare la risposta di un sistema lineare e permanente a tempo discreto ad una qualsiasi eccitazione, è sufficiente conoscere un'unica funzione del tempo che può essere misurata applicando in ingresso un impulso.

Ciò è essenzialmente dovuto al fatto che gli elementi della base utilizzata per rappresentare il segnale possono essere ottenuti per semplice traslazione di un segnale elementare.

IMPULSO MATEMATICO

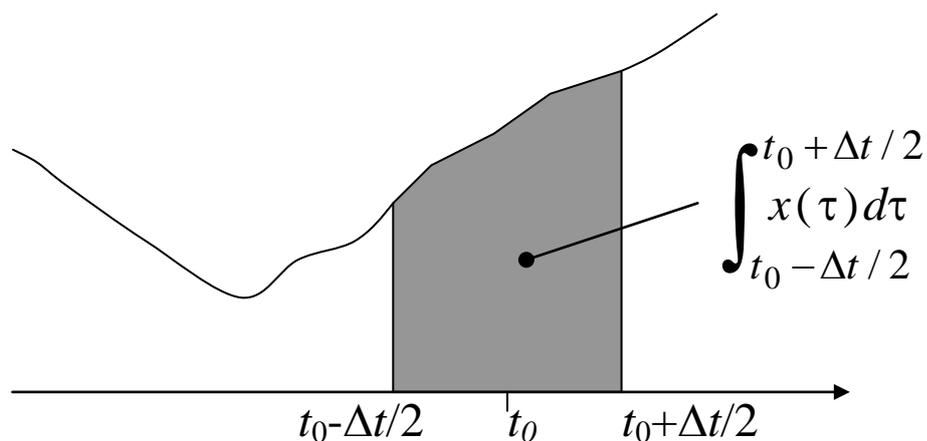
- L'estensione al tempo continuo delle relazioni ingresso-uscita relative ai sistemi tempo discreto richiede come primo passo l'individuazione dell'ente matematico corrispondente all'impulso a tempo discreto.
- Tale ente è l'**impulso matematico** o distribuzione di Dirac.
- L'impulso matematico indicato nel seguito con $u_0(t)$ é caratterizzato in modo esaustivo non da una regola di assegnazione che determina i valori assunti dall'impulso in tutti i punti dell'insieme di definizione, come per le funzioni ordinarie, ma dai valori dei prodotti scalari $\langle u_0(t), f(t) \rangle$ con tutte le funzioni continue [Courant & Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, pa. 774 e seguenti].
- **Def:** per ogni funzione continua $f(t)$ in un dato intervallo $[a,b]$ (limitato o illimitato), detto t_0 un istante arbitrario, si definisce l'integrale esteso a $[a,b]$ del prodotto della funzione $f(t)$ per l'impulso matematico $u_0(t-t_0)$, centrato in t_0 , in modo tale che esso risulti funzione continua di t_0 in $[a,b]$ e che per ogni t_0 risulti

$$\int_a^b f(t)u_0(t-t_0)dt = \begin{cases} f(t_0) & t_0 \in [a,b] \\ 0 & t_0 \notin [a,b] \end{cases}$$

IMPULSO MATEMATICO

➤ **Commento:** A causa della risoluzione limitata degli strumenti, un qualsivoglia procedimento di misura non consente di rilevare direttamente il valore assunto da un segnale $x(t)$ in un dato istante t_0 ma piuttosto il valor medio del segnale $x_{\Delta t}^{(m)}(t_0)$ in un intervallo di durata Δt centrato attorno a t_0 , che, per il *teorema della media*, è pari al valore che la funzione assume in punto opportuno t' dell'intervallo di durata Δt centrato attorno a t_0 :

$$x_{\Delta t}^{(m)}(t_0) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \Delta t/2}^{t_0 + \Delta t/2} x(\tau) d\tau$$
$$= x(t'), \quad t' \in \left[t_0 - \frac{\Delta t}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right]$$

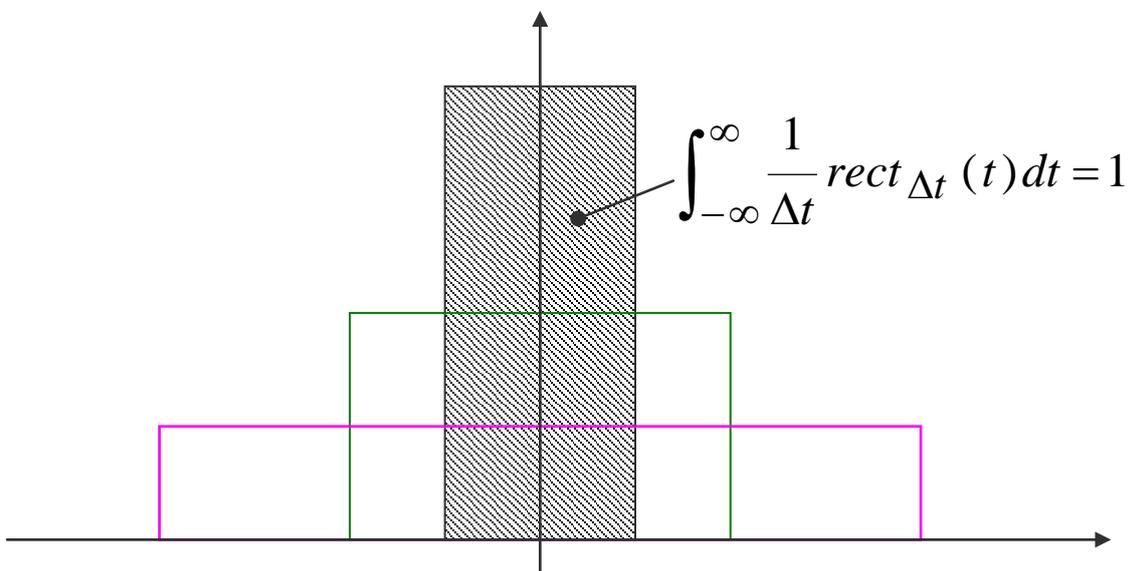


IMPULSO MATEMATICO

➤ **Commento:** Di conseguenza, dal punto di vista operativo il valore assunto dal segnale in t_0 può essere visto come il limite a cui tende il valor medio quando l'intervallo di osservazione diviene infinitesimo:

$$\begin{aligned}x(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} x_{\Delta t}^{(m)} = \\&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0 - \Delta t/2}^{t_0 + \Delta t/2} x(\tau) d\tau = \\&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \text{rect}_{\Delta t}(\tau - t_0) d\tau = \\&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\frac{1}{\Delta t} \text{rect}_{\Delta t}(\tau - t_0) \right] d\tau\end{aligned}$$

[si noti che nelle precedenti espressioni le operazioni di limite e di integrazione non possono essere scambiate].



IMPULSO MATEMATICO

➤ *Proprietà fondamentali:*

i. *proprietà di campionamento*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u_0(t - \tau) d\tau$$

(è conseguenza diretta della definizione e della simmetria dell'impulso matematico rispetto all'origine)

ii. *integrale dell'impulso*

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\tau) d\tau = 1$$

(deriva dalla proprietà precedente ponendo $x(t) = 1$)

iii. *simmetria*

$$u_0(t) = u_0(-t)$$

iv. *cambiamento di scala*

$$u_0(at) = \frac{1}{|a|} u_0(t), \quad a \neq 0$$

v. *moltiplicazione per l'impulso matematico*

$$x(t) u_0(t - t_0) = x(t_0) u_0(t - t_0)$$

RISPOSTA IMPULSIVA

○ Dato un segnale a tempo continuo per esso vale la seguente rappresentazione in termini di impulsi matematici

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u_0(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

○ dato un sistema lineare e permanente a tempo discreto, sia $h(t)$ la risposta del sistema quando venga applicato in ingresso $u_0(k)$:

$$u_0(t) \xrightarrow{S} h(t)$$

che prende il nome di **risposta impulsiva**.

Per l'invarianza nel tempo del sistema, la risposta all'impulso $u_0(t-\tau)$ traslato in τ , sarà pari a $h(t)$ traslata della stessa quantità, ovvero a $h(t-\tau)$:

$$u_0(t - \tau) \xrightarrow{S} h(t - \tau) \quad (2)$$

pertanto per la linearità del sistema, dalle (1) e (2) ne consegue che l'uscita $y(t)$ corrispondente all'ingresso $x(t)$ varrà:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

INTEGRALE DI CONVOLUZIONE

- L'operatore che lega l'uscita del sistema all'ingresso e alla risposta impulsiva prende il nome di **integrale di convoluzione del sistema**, ovvero di **convoluzione** e sarà indicato nel seguito con il simbolo *

$$\begin{aligned}y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau\end{aligned}$$

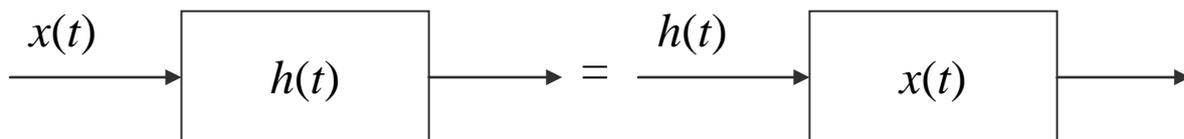
- Nel seguito si indicherà con il termine di **filtro** una rete due-porte che operi una trasformazione lineare dei segnali di ingresso
- un **filtro** viene detto **idealmente realizzabile** se la sua risposta impulsiva è un segnale reale
- un **filtro** viene detto **causale** (o fisicamente realizzabile) se è idealmente realizzabile e se risulta:

$$h(t)=0 \text{ per } t<0$$

CONVOLUZIONE: PROPRIETÀ

➤ *commutatività*

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$



Prova: dalla definizione, effettuando il cambiamento di variabile $\xi=t-\tau$ si ha:

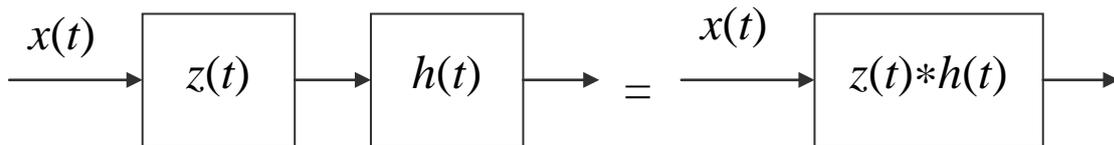
$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = - \int_{\infty}^{-\infty} x(t-\xi)h(\xi)d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\xi)h(\xi)d\xi \\ &= h(t) * x(t) \end{aligned}$$

c.d.d.

CONVOLUZIONE: PROPRIETÀ

➤ *associatività*

$$[x(t) * z(t)] * h(t) = x(t) * [z(t) * h(t)]$$



Prova: dalla definizione, si ha:

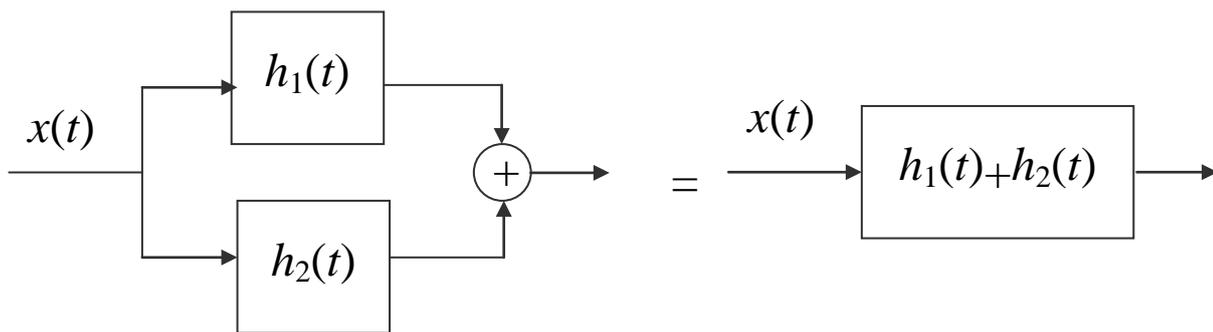
$$\begin{aligned} [x(t) * z(t)] * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi) z(\tau - \xi) d\xi \right] h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h[(t - \xi) - (\tau - \xi)] z(\tau - \xi) d\tau \right] x(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [z(t - \xi) * h(t - \xi)] x(\xi) d\xi \\ &= x(t) * [z(t) * h(t)] \end{aligned}$$

c.d.d.

CONVOLUZIONE: PROPRIETÀ

➤ *distributività rispetto alla somma*

$$x(t)[h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$



Prova: dalla definizione, si ha:

$$\begin{aligned} x(t)[h_1(t) + h_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)[h_1(\tau) + h_2(\tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h_1(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h_2(\tau) d\tau \\ &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \end{aligned}$$

c.d.d.

CONVOLUZIONE: PROPRIETÀ

1. $x(t) * u_0(t) = x(t)$

2. $x(t) * u_0(t - t_0) = x(t - t_0)$

3. *posto*

$$z(t) = x(t) * y(t)$$

si ha

$$x(t - t_a) * y(t - t_b) = z[t - (t_a + t_b)]$$

Infatti:

$$\begin{aligned} x(t - t_a) * y(t - t_b) &= [x(t) * u_0(t - t_a)] * [y(t) * u_0(t - t_b)] \\ &= [x(t) * y(t)] * [u_0(t - t_a) * u_0(t - t_b)] \\ &= [x(t) * y(t)] * u_0[t - (t_a + t_b)] \end{aligned}$$

STABILITÀ

- **Def.:** Un filtro si dice stabile se il segnale di uscita risulta limitato ovunque quando in ingresso è applicato un segnale limitato ovunque.
- **Teorema:** Condizione necessaria e sufficiente affinché un filtro sia stabile è che la sua risposta impulsiva sia assolutamente integrabile:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

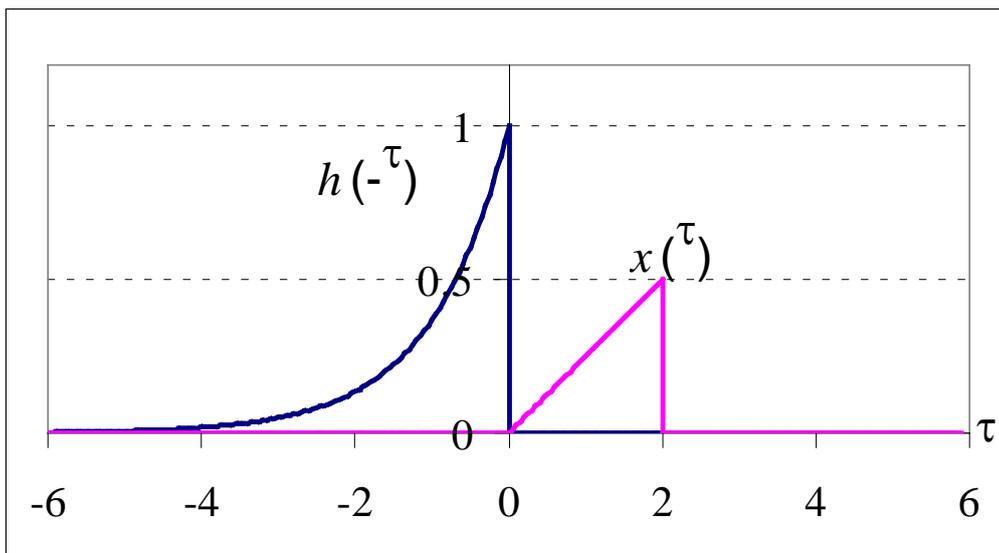
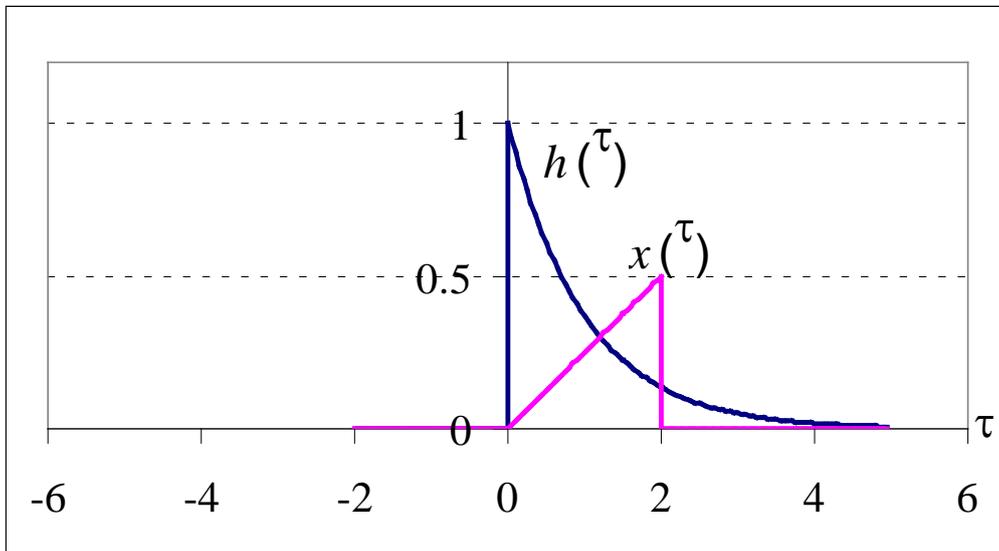
Prova: Per dimostrare la sufficienza, si osservi che, poiché per un ingresso $x(t)$ limitato ovunque, per definizione, si ha che $|x(t)| < M$, se la risposta impulsiva è assolutamente integrabile per l'integrale della risposta impulsiva vale la seguente maggiorazione

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau) h(t - \tau)| d\tau \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| |h(t - \tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(t - \tau)| d\tau < \infty \end{aligned}$$

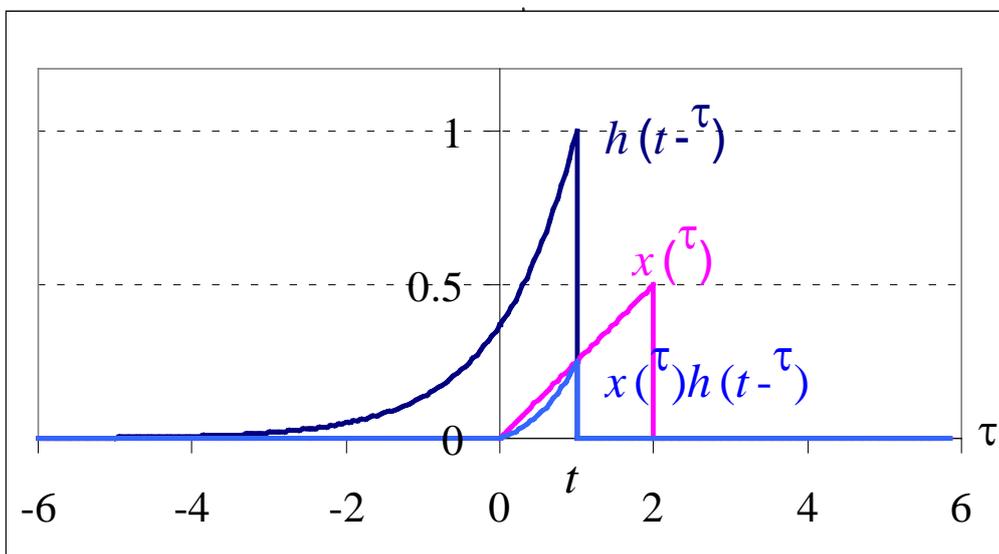
Per dimostrare la necessità si osservi che se il filtro è stabile, l'uscita in $t=0$ deve essere limitata ovunque, ovvero $|y(t)| < N$ comunque si scelga un ingresso $x(t)$ limitato ovunque. Tale condizione deve quindi essere valida anche per l'ingresso $x(t) = -\text{sign}[h(-t)]$ e quindi:

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} -\text{sign}\{h[-(0 - \tau)]\} h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < N.$$

CONVOLUZIONE: INTERPRETAZIONE GRAFICA



➤ ribalta $h(\tau)$



➤ trasla
l'origine in t

PRODOTTO SCALARE

➤ **Def.:** Un'applicazione da $X \times X$ su S è un *prodotto scalare* e si indica con $\langle x, y \rangle$ se verifica le seguenti condizioni:

i. è *distributiva* rispetto al primo elemento

$$\langle x+z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$$

ii. è *omogenea* rispetto al primo elemento, cioè per ogni scalare λ si ha

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

iii. è *hermitiana*

$$\langle x, y \rangle = [\langle y, x \rangle]^*$$

dove con $*$ si intende il complesso coniugato

iv. è *strettamente positiva*:

$$\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{con } \langle x, x \rangle = 0 \text{ se e solo se } x = \mathbf{0}.$$

➤ **Proprietà:** Diseguaglianza di SCHWARZ

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

NORMA

➤ **Def.:** Un'applicazione da $X \times X$ su R è una *norma* e si indica con $\|x\|$ se verifica le seguenti condizioni:

i. è *strettamente positiva*

$$\|x\| \geq 0, \text{ con } \|x\|=0 \text{ se e solo se } x=0.$$

ii. è *assolutamente omogenea*, cioè per ogni scalare λ si ha

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

iii. è *subadditiva*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

➤ **Proprietà:**

□ *norma hilbertiana*

$$\|x\| = [\langle x, x \rangle]^{1/2}$$

□ *distanza tra elementi di uno spazio metrico*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

SPAZI DI HILBERT

Uno spazio vettoriale X è uno spazio di Hilbert se

- i. è dotato di prodotto scalare $\langle x, y \rangle$
- ii. è normato mediante la norma hilbertiana

$$\|x\| = [\langle x, x \rangle]^{1/2}$$

- iii. è completo, ossia ogni successione principale è convergente (ovvero la condizione di CAUCHY è necessaria e sufficiente per la convergenza di una successione).

SEGNALI DI ENERGIA

➤ **Def.:** Dato un segnale $x(t)$, si definisce energia totale E_x del segnale la seguente grandezza reale (se esiste)

$$E_x = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) x^*(t) dt$$

➤ **Significato fisico:** se $x(t)$ è reale E_x coincide con l'energia totale dissipata da un resistore da 1Ω quando ai suoi capi si applica la tensione $x(t)$ [Volt] oppure quando esso è attraversato da una corrente $x(t)$ [Ampère]

➤ **Un segnale si dice di energia se** la sua energia totale E_x è finita ed inoltre $E_x > 0$.

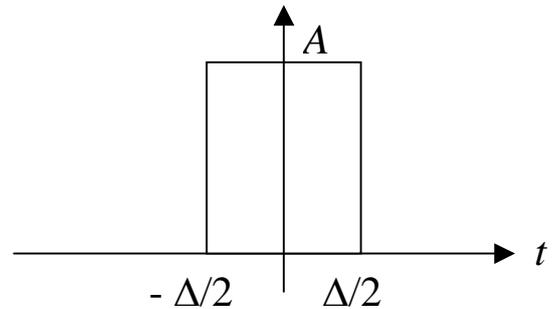
SEGNALI DI ENERGIA

➤ *Esercizio:* Si calcoli l'energia del segnale

□ $x(t) = A \text{rect}_\Delta(t)$

essendo

$$\text{rect}_\Delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } -\frac{\Delta}{2} \leq t \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



In base alla definizione si ottiene direttamente

$$E_x = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |A|^2 \text{rect}_\Delta(t) dt = |A|^2 \Delta.$$

SEGNALI DI ENERGIA

➤ *L'insieme dei segnali di energia costituisce uno spazio vettoriale.*

A tale scopo è sufficiente verificare che se $x(t)$ e $y(t)$ sono segnali di energia, la loro somma è un segnale di energia.

$$\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t) + y(t)|^2 dt \leq 2 \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t)|^2 dt + 2 \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |y(t)|^2 dt < \infty$$

□ *si ricorda che*

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|ab|$$

e quindi

i. $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$

ii. $|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$

SEGNALI DI POTENZA

- **Def.:** Dato un segnale $x(t)$, si definisce potenza totale P_x del segnale la seguente grandezza reale (se esiste)

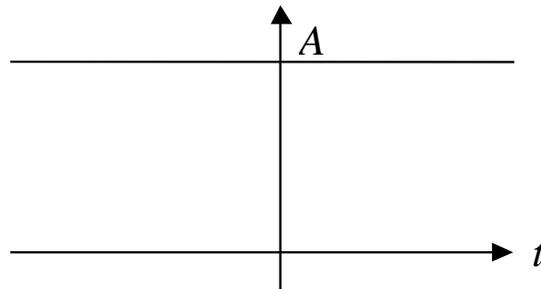
$$P_x = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t)x^*(t) dt$$

- **Significato fisico:** se $x(t)$ è reale coincide con la potenza totale dissipata da un resistore da 1Ω quando ai suoi capi si applica la tensione $x(t)$ [Volt], oppure quando esso è attraversato da una corrente $x(t)$ [Ampère]
- **Un segnale si dice di potenza** se la sua energia totale E_x è infinita ed inoltre la sua potenza totale P_x è finita e $P_x > 0$.

SEGNALI DI POTENZA

➤ *Esercizio:* Si calcoli la potenza del segnale

□ $x(t)=A$



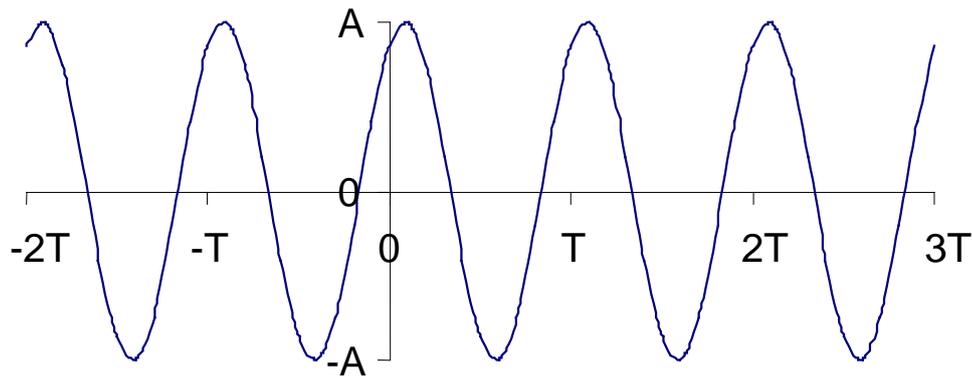
In base alla definizione si ottiene

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |A|^2 dt = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} |A|^2 \Delta T \\ &= |A|^2 . \end{aligned}$$

SEGNALI DI POTENZA

➤ *Esercizio:* Si calcoli la potenza del segnale

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$



$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)|^2 dt \\ &= \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \frac{|A|^2}{2} dt + \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \frac{|A|^2}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\varphi) dt \\ &= \frac{|A|^2}{2} \end{aligned}$$

SEGNALI DI POTENZA

➤ *L'insieme dei segnali di potenza costituisce uno spazio vettoriale.*

A tale scopo è sufficiente verificare che se $x(t)$ e $y(t)$ sono segnali di potenza, la loro somma è un segnale di potenza.

$$\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t) + y(t)|^2 dt \leq 2 \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t)|^2 dt + 2 \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |y(t)|^2 dt < \infty$$

□ *si ricorda che*

$$0 \leq (|a| - |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|ab|$$

e quindi

iii. $2|ab| \leq |a|^2 + |b|^2$

iv. $|a + b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$

PRODOTTO SCALARE PER SEGNALI DI ENERGIA

Nello spazio vettoriale dei segnali di energia può definirsi il seguente prodotto scalare

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) y^*(t) dt$$

tale integrale ha valore finito poichè

$$\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t) y^*(t)| dt \leq \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t)|^2 dt + \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |y(t)|^2 dt < \infty$$

inoltre

i. è *distributivo* rispetto al primo elemento

$$\langle x(t) + z(t), y(t) \rangle = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) y^*(t) dt + \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} z(t) y^*(t) dt$$

PRODOTTO SCALARE PER SEGNALI DI ENERGIA (CONT.)

ii. è *omogeneo* rispetto al primo elemento, cioè \forall scalare λ si ha

$$\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \lambda x(t) y^*(t) dt = \lambda \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) y^*(t) dt$$

iii. è *hermitiano*

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \left[\int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) y^*(t) dt \right]^* &= \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} [x(t) y^*(t)]^* dt \\ &= \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} y(t) x^*(t) dt \end{aligned}$$

iv. è *strettamente positivo*: infatti per definizione di segnale di energia si ha

$$\langle x(t), x(t) \rangle = E_x > 0$$

per ogni segnale di energia (non identicamente nullo).

➤ **Proprietà:** Diseguaglianza di SCHWARZ

$$\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \left| \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq E_x E_y$$

PRODOTTO SCALARE PER SEGNALI DI POTENZA

Nello spazio vettoriale dei segnali di potenza può definirsi il seguente prodotto scalare

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) y^*(t) dt$$

tale integrale ha valore finito poiché

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t) y^*(t)| dt &\leq \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |x(t)|^2 dt + \\ &\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} |y(t)|^2 dt < \infty \end{aligned}$$

inoltre

v. è *distributivo* rispetto al primo elemento

$$\begin{aligned} \langle x(t) + z(t), y(t) \rangle &= \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) y^*(t) dt + \\ &\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} z(t) y^*(t) dt \end{aligned}$$

PRODOTTO SCALARE PER SEGNALI DI POTENZA (CONT.)

vi. è *omogeneo* rispetto al primo elemento, cioè \forall scalare λ si ha

$$\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \lambda x(t) y^*(t) dt = \lambda \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) y^*(t) dt$$

vii. è *hermitiano*

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \left[\int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) y^*(t) dt \right]^* &= \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} [x(t) y^*(t)]^* dt \\ &= \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} y(t) x^*(t) dt \end{aligned}$$

viii. è *strettamente positivo*: infatti per definizione di segnale di potenza si ha

$$\langle x(t), x(t) \rangle = P_x > 0$$

per ogni segnale di potenza (non identicamente nullo).

➤ **Proprietà:** Diseguaglianza di SCHWARZ

$$\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \left| \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq P_x P_y$$

ORTOGONALITÀ

- **Def.:** due elementi di uno spazio vettoriale si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo:

$$\langle x, y \rangle = 0$$

- **Def.:** Una base $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ si dice ortogonale se gli elementi che la costituiscono sono mutuamente ortogonali:

- **Def.:** si dice inoltre che $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ costituisce un sistema ortonormale se

$$\langle e_h, e_k \rangle = \delta_{h,k} = \begin{cases} 1 & h = k \\ 0 & h \neq k \end{cases}$$

- **Proprietà:** data una base ortogonale $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ i coefficienti c_k dello sviluppo di x sono dati dai coefficienti di Fourier generalizzati:

$$c_k = \frac{\langle x, e_k \rangle}{\langle e_k, e_k \rangle}.$$

- Dim.:** Si osservi che moltiplicando scalarmente x per e_k , per l'ortogonalità si ha:

$$\begin{aligned} \langle x, e_k \rangle &= \left\langle \sum_h c_h e_h, e_k \right\rangle = \sum_h c_h \langle e_h, e_k \rangle \\ &= c_k \langle e_k, e_k \rangle. \end{aligned}$$

INTERCORRELAZIONE

Def.1: dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$, di cui almeno uno impulsivo, prende il nome di integrale di intercorrelazione tra essi la seguente espressione:

$$e_{xy}(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x^*(\tau) y(t + \tau) d\tau$$

➤ *Si noti che per questa classe di segnali vale la seguente relazione tra intercorrelazione e convoluzione*

$$e_{xy}(\tau) = x^*(-t) * y(t).$$

Def.2: dati due segnali $x(t)$ e $y(t)$ di potenza, prende il nome di integrale di intercorrelazione tra essi la seguente espressione:

$$p_{xy}(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x^*(\tau) y(t + \tau) d\tau$$

CORRELAZIONE

➤ per $x(t)=y(t)$ la funzione di correlazione prende il nome di
AUTOCORRELAZIONE

□ Autocorrelazione per segnali di energia

$$e_x(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x^*(\tau) x(t + \tau) d\tau$$

□ Autocorrelazione per segnali di potenza

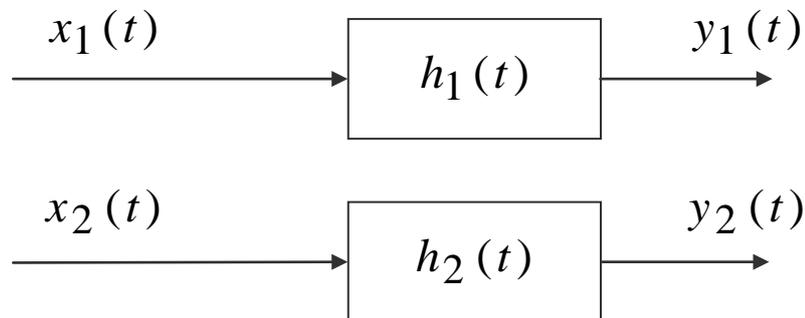
$$p_x(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x^*(\tau) x(t + \tau) d\tau$$

PROPRIETÀ DELLA CORRELAZIONE

Valgono le seguenti proprietà

Segnali di energia	Segnali di potenza
$e_{xy}(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x^*(\tau) y(t + \tau) d\tau$	$p_{xy}(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x^*(\tau) y(t + \tau) d\tau$
$e_{xy}(t) = \langle y(t + \tau), x(\tau) \rangle$	$p_{xy}(t) = \langle y(t + \tau), x(\tau) \rangle$
$e_{xx}(0) = \mathbf{E}_x$	$p_{xx}(0) = \mathbf{P}_x$
$e_{yx}(t) = e_{xy}^*(-t)$	$p_{yx}(t) = p_{xy}^*(-t)$
$ e_{xy}(t) ^2 \leq \mathbf{E}_x \mathbf{E}_y$	$ p_{xy}(t) ^2 \leq \mathbf{P}_x \mathbf{P}_y$
$ e_{xx}(t) \leq \mathbf{E}_x$	$ p_{xx}(t) \leq \mathbf{P}_x$

TRASFORMAZIONI LINEARI ED INTERCORRELAZIONE



- **Teorema:** Dati due filtri stabili con risposte impulsive $h_1(t)$ e $h_2(t)$ a cui vengano applicati in ingresso due segnali di energia $x_1(t)$ e $x_2(t)$, sussiste la seguente relazione tra le funzioni di correlazione:

$$e_{y_1 y_2}(t) = e_{x_1 x_2}(t) * e_{h_1 h_2}(t)$$

- **Corollario:** Dati due filtri stabili con risposte impulsive $h_1(t)$ e $h_2(t)$ a cui vengano applicati in ingresso due segnali di energia $x_1(t)$ e $x_2(t)$, sussistono le seguenti relazioni tra le funzioni di correlazione:

$$e_{y_1 y_1}(t) = e_{x_1 x_1}(t) * e_{h_1 h_1}(t)$$

$$e_{y_2 y_2}(t) = e_{x_2 x_2}(t) * e_{h_2 h_2}(t)$$

$$e_{x_1 y_1}(t) = e_{x_1 x_1}(t) * h_1(t)$$

$$e_{x_1 y_2}(t) = e_{x_1 x_2}(t) * h_2(t)$$

$$e_{x_2 y_2}(t) = e_{x_2 x_2}(t) * h_2(t)$$

$$e_{x_2 y_1}(t) = e_{x_1 x_2}(t) * h_1(t)$$

TRASFORMAZIONI LINEARI ED INTERCORRELAZIONE

Prova: Poiché $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono due segnali di energia, per la loro funzione di intercorrelazione si ha

$$e_{y_1 y_2}(t) = y_1^*(-t) * y_2(t)$$

e quindi considerando che $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono dati dalle convoluzioni tra $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e le rispettive risposte impulsive, si ottiene

$$\begin{aligned} e_{y_1 y_2}(t) &= \left[x_1^*(-t) * h_1^*(-t) \right] * \left[x_2(t) * h_2(t) \right] \\ &= \left[x_1^*(-t) * x_2(t) \right] * \left[h_1^*(-t) * h_2(t) \right] \\ &= e_{x_1 x_2}(t) * e_{h_1 h_2}(t) \end{aligned}$$

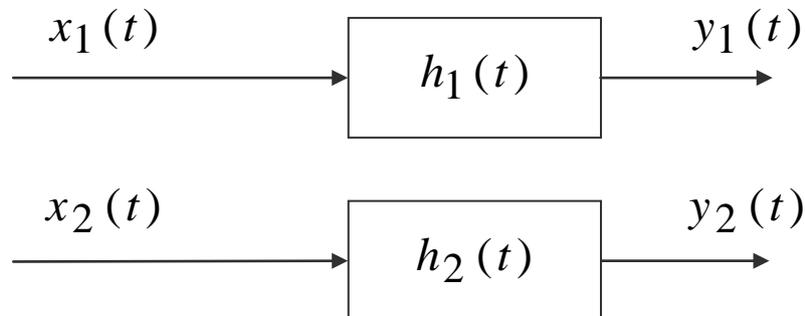
c.d.d.

Per le funzioni di intercorrelazione ingresso-uscita analogamente si ha

$$\begin{aligned} e_{x_1 y_2}(t) &= x_1^*(-t) * y_2(t) \\ &= x_1^*(-t) * \left[x_2(t) * h_2(t) \right] \\ &= \left[x_1^*(-t) * x_2(t) \right] * h_2(t) \\ &= e_{x_1 x_2}(t) * h_2(t) \end{aligned}$$

Dalla precedente, ponendo $x_1(t)=x_2(t)$ e $h_1(t)=h_2(t)$ si ottengono i casi particolari relativi ad un solo filtro.

TRASFORMAZIONI LINEARI ED INTERCORRELAZIONE



- **Teorema:** Dati due filtri stabili con risposte impulsive $h_1(t)$ e $h_2(t)$ a cui vengano applicati in ingresso due segnali di potenza $x_1(t)$ e $x_2(t)$, sussiste la seguente relazione tra le funzioni di correlazione:

$$p_{y_1 y_2}(t) = p_{x_1 x_2}(t) * e_{h_1 h_2}(t)$$

- **Corollario:** Dati due filtri stabili con risposte impulsive $h_1(t)$ e $h_2(t)$ a cui vengano applicati in ingresso due segnali di potenza $x_1(t)$ e $x_2(t)$, sussistono le seguenti relazioni tra le funzioni di correlazione:

$$p_{y_1 y_1}(t) = p_{x_1 x_1}(t) * e_{h_1 h_1}(t)$$

$$p_{y_2 y_2}(t) = p_{x_2 x_2}(t) * e_{h_2 h_2}(t)$$

$$p_{x_1 y_1}(t) = p_{x_1 x_1}(t) * h_1(t)$$

$$p_{x_1 y_2}(t) = p_{x_1 x_2}(t) * h_2(t)$$

$$p_{x_2 y_2}(t) = p_{x_2 x_2}(t) * h_2(t)$$

$$p_{x_2 y_1}(t) = p_{x_1 x_2}(t) * h_1(t)$$

TRASFORMAZIONI LINEARI ED INTERCORRELAZIONE

Prova: Poiché $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono due segnali di potenza, considerato che essi dati dalle convoluzioni tra $x_1(t)$ e $x_2(t)$ e le rispettive risposte impulsive, per la loro funzione di intercorrelazione si ha

$$\begin{aligned}
 p_{y_1 y_2}(t) &= \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} y_1^*(\tau) y_2(t + \tau) d\tau \\
 &= \lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau - \lambda) h_1(\lambda) d\lambda \right]^* \\
 &\quad \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t + \tau - \theta) h_2(\theta) d\theta \right] d\tau
 \end{aligned}$$

Scambiando l'ordine di integrazione e l'operazione di limite con l'operazione di integrazione rispetto a θ si ha

$$\begin{aligned}
 p_{x_1 y_2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1^*(\lambda) h_2(\theta) \\
 &\quad \left[\lim_{\Delta T \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} x_1^*(\tau - \lambda) x_2(t + \tau - \theta) d\tau \right] d\lambda d\theta
 \end{aligned}$$

quindi poiché il termine tra parentesi quadre è pari all'intercorrelazione tra gli ingressi segue che

TRASFORMAZIONI LINEARI ED INTERCORRELAZIONE

$$p_{x_1 y_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_1^*(\lambda) h_2(\theta) p_{x_1 x_2}[t - (\theta - \lambda)] d\lambda d\theta$$

effettuando il cambiamento di variabile

$$\begin{cases} \mu = \theta \\ \nu = \theta - \lambda \end{cases}, \quad \begin{cases} \theta = \mu \\ \lambda = \mu + \nu \end{cases}$$

poiché per il determinante jacobiano della trasformazione si ha:

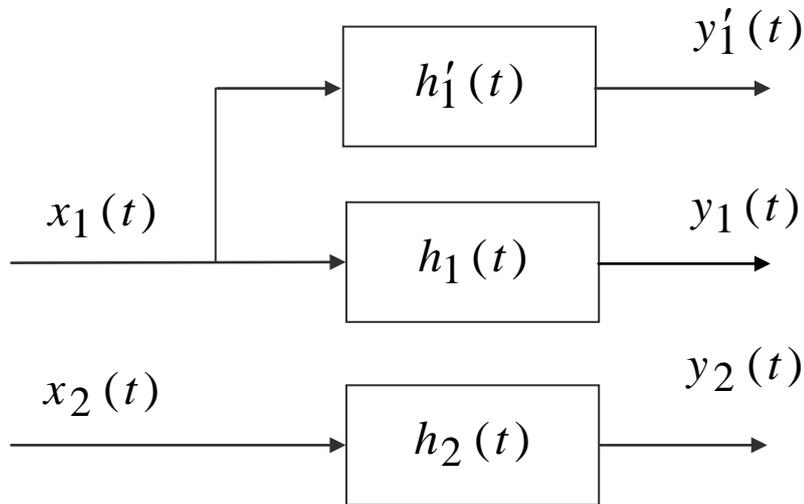
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial \mu} & \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \nu} & \frac{\partial \lambda}{\partial \nu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

per la funzione di intercorrelazione si ottiene

$$\begin{aligned} p_{y_1 y_2}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1^*(\mu + \nu) h_2(\mu) d\mu \right] p_{x_1 x_2}(t - \nu) d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e_{h_1 h_2}(\nu) p_{x_1 x_2}(t - \nu) d\nu = \\ &= p_{x_1 x_2}(t) * e_{h_1 h_2}(t) \end{aligned}$$

c.d.d.

TRASFORMAZIONI LINEARI ED INTERCORRELAZIONE



Per il calcolo della funzione di intercorrelazione tra ingressi ed uscite si osservi che con riferimento allo schema di figura, posto $h'_1(t) = u_0(t)$ si ha

$$\square y'_1(t) = x_1(t),$$

$$\square e_{h'_1 h_2}(t) = u_0^*(-t) * h_2(t) = u_0(t) * h_2(t) = h_2(t)$$

e quindi dalla precedente relazione si ha:

$$\begin{aligned} p_{x_1 y_2}(t) &\equiv p_{y'_1 y_2}(t) = p_{x_1 x_2}(t) * e_{h'_1 h_2}(t) \\ &= p_{x_1 x_2}(t) * h_2(t) \end{aligned}$$

Dalle precedenti relazioni, ponendo $x_1(t) = x_2(t)$ e $h_1(t) = h_2(t)$ si ottengono, poi, i casi particolari relativi ad un solo filtro.

c.d.d.

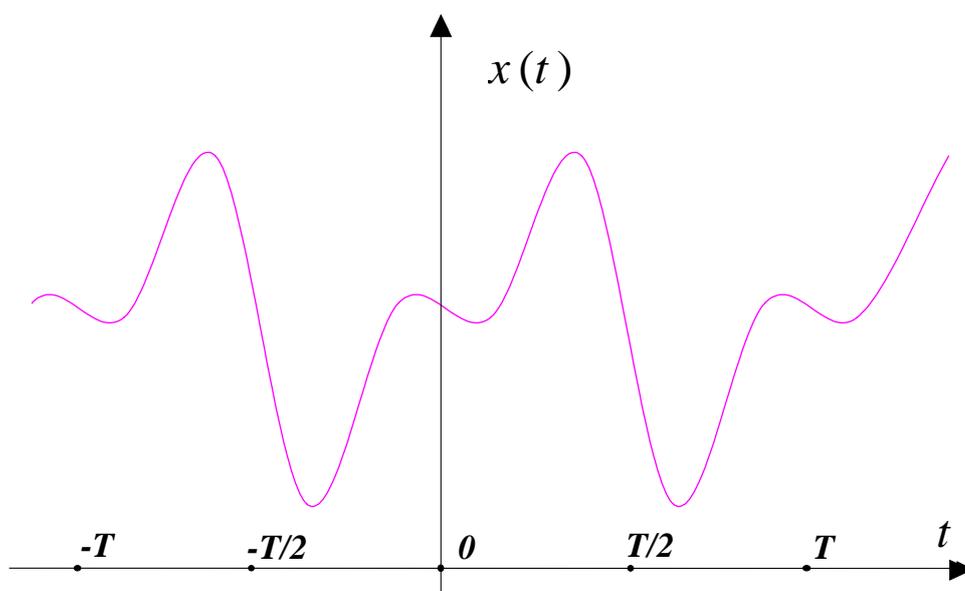
SEGNALI PERIODICI

➤ **Def.:** Dato un segnale $x(t)$, esso si dice periodico di periodo T se, per ogni istante t risulta

$$x(t+T) = x(t)$$

➤ La forma d'onda di un segnale periodico risulta completamente definita se l'andamento di $x(t)$ è noto in un qualsiasi intervallo di durata T . Nel seguito si assumerà che tale intervallo sia pari a $[-T/2, T/2)$.

➤ *L'inverso di T ($F=1/T$) si dice frequenza fondamentale e rappresenta il numero di periodi contenuti nell'unità di tempo.*



SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI

➤ **Teorema di Fourier.:** Dato un segnale $x(t)$ periodico di periodo T che risulti

- i. generalmente continuo in $[-T/2, T/2)$
- ii. assolutamente integrabile in $[-T/2, T/2)$,

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x(\tau)| d\tau < +\infty$$

esso può essere rappresentato come segue

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

con

$$f_n = n F = \frac{n}{T}$$

e dove i valori

$$x_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt < +\infty$$

prendono il nome di **Coefficienti di Fourier** del segnale $x(t)$.

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (CONT.)

➤ L'uguaglianza

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

va intesa come segue:

- i. in tutti i punti in cui la funzione è *continua* il primo e il secondo membro **coincidono**
- ii. nei punti di *discontinuità di prima specie* la serie a secondo membro **converge alla semisomma dei limiti** da destra e da sinistra di $x(t)$

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} x(t) \right]$$

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (CONT.)

□ *Commento:*

fondamentalmente il teorema afferma che la *famiglia* di funzioni

$$s_n(t) = e^{j2\pi f_n t} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

costituisce una **base** per i segnali periodici di periodo T . Tale base risulta **ortonormale**, cioè

$$\langle s_m(t), s_n(t) \rangle = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

Prova: Si osservi che, dati due segnali di potenza $x(t)$ e $y(t)$ periodici di periodo T il loro prodotto $x(t)y(t)^*$ è periodico di periodo T e il loro prodotto scalare si può calcolare come segue

$$\begin{aligned} \langle x(t), y(t) \rangle &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} x(t) y^*(t) dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \int_{-NT/2}^{NT/2} x(t) y^*(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \left(N \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt \end{aligned}$$

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (CONT.)

Pertanto, per due elementi $e^{j2\pi f_n t}$, $e^{j2\pi f_m t}$ della base si ha

$$\begin{aligned} \langle e^{j2\pi f_n t}, e^{j2\pi f_m t} \rangle &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi f_n t} e^{-j2\pi f_m t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\frac{2\pi}{T}(n-m)t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt = 1 & n = m \\ \frac{e^{j\frac{2\pi}{T}(n-m)t}}{j2\pi(n-m)} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\pi} = 0 & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

C.D.D.

SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI

➤ *Proprietà fondamentali:*

i. *linearità*

$$Ax(t) + By(t) \Leftrightarrow AX_n + BY_n$$

ii. *traslazione nel tempo*

$$x(t - \tau) \Leftrightarrow X_n e^{-j2\pi F_n \tau}$$

iii. *traslazione in frequenza*

$$x(t)e^{j2\pi F_k t} \Leftrightarrow X_{n-k}$$

iv. *differenziazione*

$$\frac{d}{dt}x(t) \Leftrightarrow j2\pi F_n X_n$$

v. *integrazione*

dato un segnale periodico $x(t)$ è a valor medio nullo, ovvero tale che

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt = 0$$

si ha:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi F_n} X_n.$$

SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI

➤ *Proprietà fondamentali (segue):*

i. *Intercorrelazione*

$$p_{xy}(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} x^*(t) y(t+\tau) dt \Leftrightarrow \mathcal{P}_{xy_n} = X_n^* Y_n$$

Prova: Dati due segnali periodici $x(t)$ e $y(t)$, l'intercorrelazione è ancora un segnale periodico ed è pari a

$$\begin{aligned} p_{xy}(\tau) &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} x^*(t) y(t+\tau) dt \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n^* e^{-j2\pi F_n t} \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_m e^{j2\pi F_m (t+\tau)} \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_n^* Y_m e^{j2\pi m F \tau} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} e^{j2\pi F(m-n)t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n^* Y_n e^{j2\pi n F \tau} \end{aligned}$$

c.d.d.

TEOREMA DI PARSEVAL PER SEGNALI PERIODICI.

➤ *Teorema di Parseval per segnali periodici.* Dato un segnale periodico di potenza $x(t)$, ed indicati con X_n i coefficienti della serie di Fourier relativa, la sua potenza P_x è pari a:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2$$

□ *Prova:* Poiché la potenza è pari alla funzione di autocorrelazione del segnale calcolata nell'origine si ha

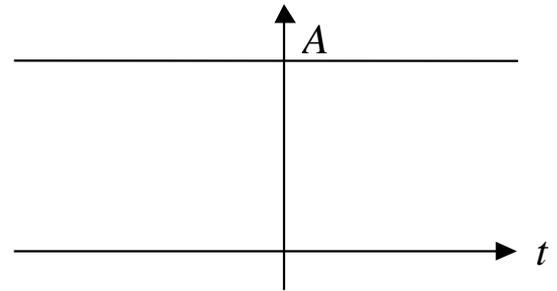
$$P_x = p_{xx}(0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 e^{j2\pi nF0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2$$

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (CONT.)

○ Esempio 1

Serie di Fourier del segnale $x(t)=A$

che risulta periodico di periodo T
qualunque sia T .

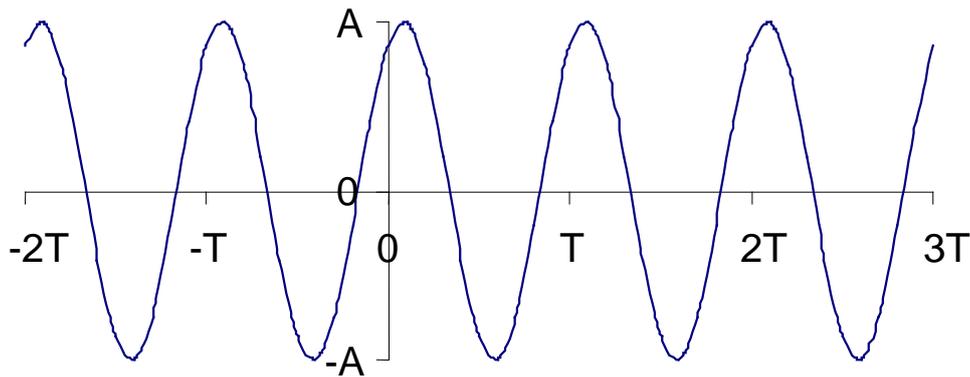


$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt \\&= \left[\frac{e^{-j2\pi \frac{n}{T} t}}{-j2\pi \frac{n}{T}} \right]_{-T/2}^{T/2} = A \left(-\frac{e^{-j\pi n} - e^{+j\pi n}}{j2\pi n} \right) = A \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} \\&= \begin{cases} A & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

- Il segnale pari a costante possiede quindi un solo coefficiente dello sviluppo $x_0=A$, come d'altronde era evidente confrontando il segnale stesso con lo sviluppo in serie.

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (CONT.)

○ Esempio 2



Serie di Fourier del segnale $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

che risulta periodico di periodo $T = 1/f_0$.

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(2\pi f_0 t + \varphi) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt \\&= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{A}{2} \left(e^{j\varphi} e^{j\frac{2\pi}{T} t} + e^{-j\varphi} e^{-j\frac{2\pi}{T} t} \right) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt \\&= \frac{A}{2} e^{j\varphi} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j\frac{2\pi}{T} t} e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt \\&\quad + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\frac{2\pi}{T} t} e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt\end{aligned}$$

Per l'ortonormalità della famiglia di funzioni, il primo integrale risulta diverso da zero (e pari a 1) solo per $n=1$, e il secondo integrale è diverso da zero solo per $n=-1$. Di conseguenza si ha

$$x_n = \begin{cases} \frac{A}{2} e^{j\varphi} & n = 1 \\ \frac{A}{2} e^{-j\varphi} & n = -1 \\ 0 & n \neq 1, -1 \end{cases}$$

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (CONT.)

○ Esempio 3

Serie di Fourier del treno di impulsi

$$x(t) = \Pi_T(t) = \sum_k u_0(t - kT)$$

che risulta periodico di periodo $T = 1/f_0$.

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_0(t - kT) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_0(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

I coefficienti di Fourier sono costanti.

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (CONT.)

○ Esempio 5

Serie di Fourier del treno di impulsi rettangolari

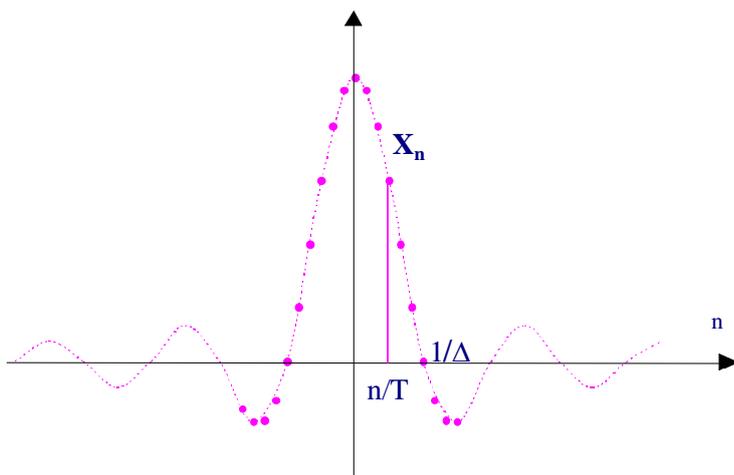
$$x(t) = \sum_k \text{rect}_\Delta(t - kT)$$

che risulta periodico di periodo $T = 1/f_0$.

Si ricorre alla proprietà della *derivazione*.

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_0(t - kT + \Delta/2) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_0(t - kT - \Delta/2)$$

$$Y_n = j2\pi \frac{n}{T} X_n = \frac{1}{T} e^{j2\pi \frac{n}{T} \frac{\Delta}{2}} - \frac{1}{T} e^{-j2\pi \frac{n}{T} \frac{\Delta}{2}}$$



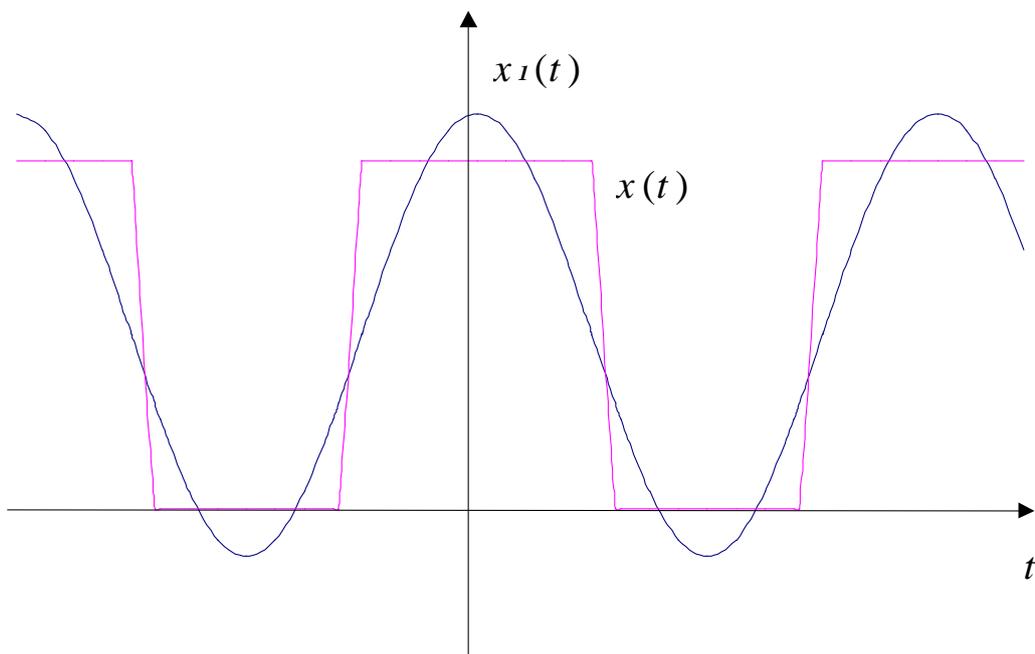
da cui segue:

$$X_n = \frac{\Delta}{T} \frac{\sin\left(\pi \frac{n}{T} \Delta\right)}{\pi \frac{n}{T} \Delta}$$

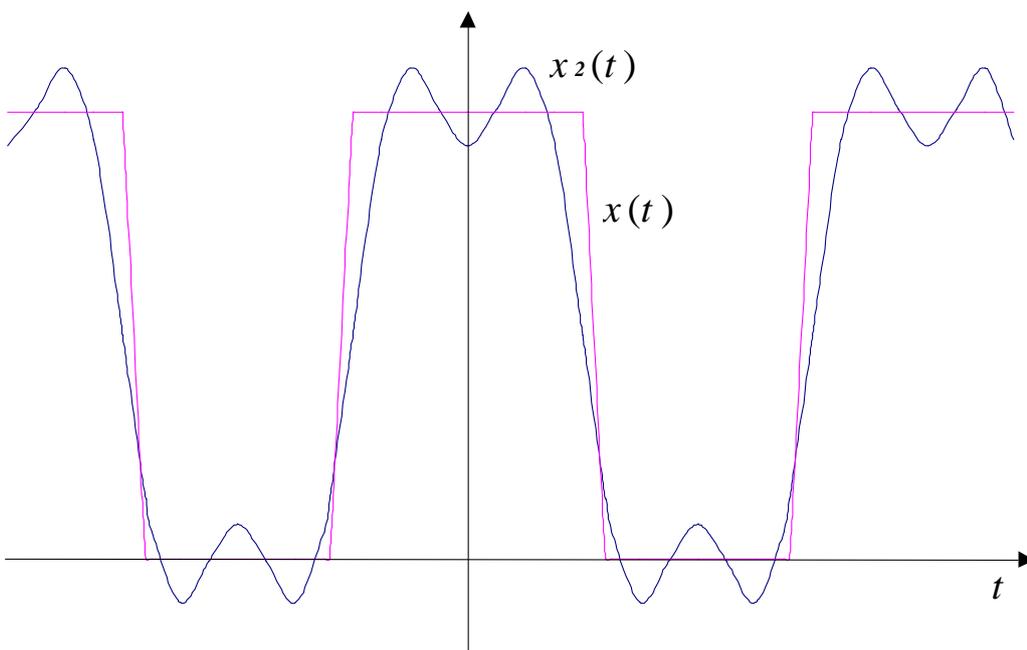
SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (CONT.)

○ *Esempio 5 (cont.)*

I Approssimazione:



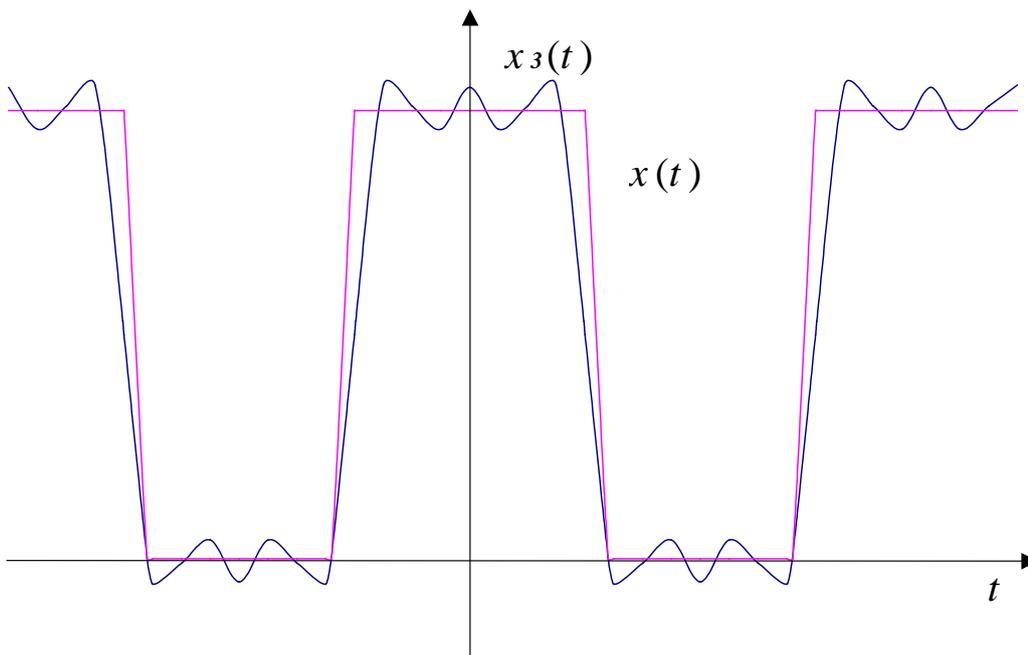
II Approssimazione:



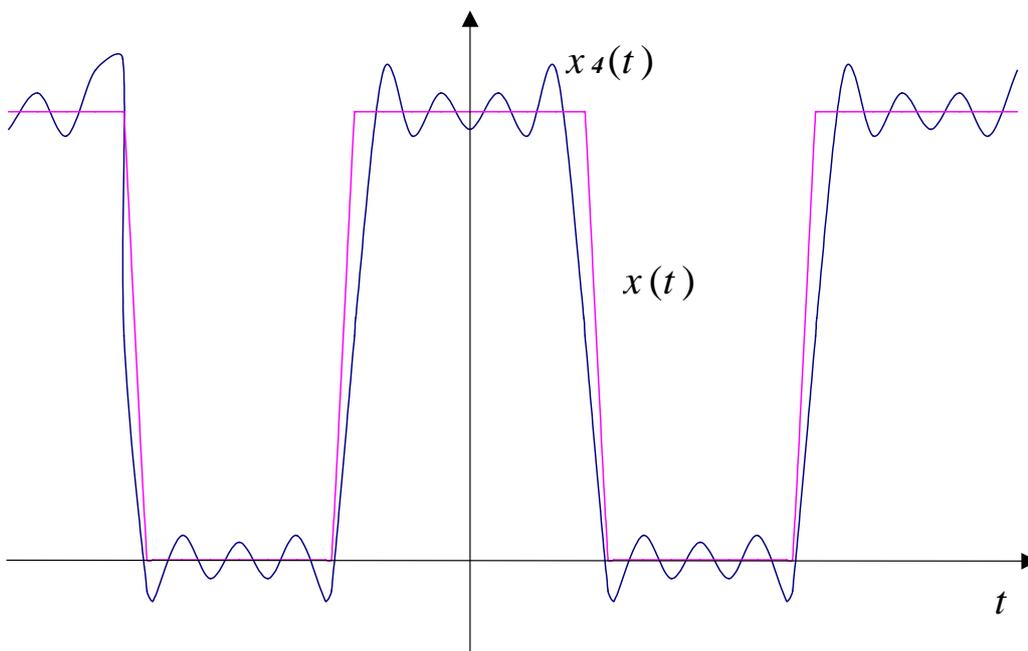
SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (CONT.)

○ *Esempio 5 (cont.)*

III Approssimazione:



IV Approssimazione:



SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI (CONT.)

○ Esempio 4

Autocorrelazione del treno di impulsi

$$x(t) = \sum_k u_0(t - kT)$$

L'autocorrelazione del treno di impulsi è un segnale periodico di periodo $T = 1/f_0$. I coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier sono pari al modulo quadrato dei coefficienti del treno di impulsi (proprietà dell'intercorrelazione).

$$P_{xxn} = |X_n|^2 = \frac{1}{T^2}$$

I coefficienti di Fourier sono costanti, e *la serie converge ad un treno di impulsi di area $1/T$* .

$$p_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T}\right)^2 e^{j2\pi\frac{k}{T}\tau} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_0(\tau - kT)$$

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER PER SEGNALI PERIODICI

➤ *L'autocorrelazione di un segnale periodico* $y(t)$ di periodo T risulta dalla *sovrapposizione di infinite repliche*, distanziate di intervalli multipli del periodo T e scalate di un fattore $1/T$, della funzione di autocorrelazione della **funzione generatrice** $g(t)$ definita come

$$g(t) = \begin{cases} y(t) & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Prova: Poiché $y(t) = g(t) * \Pi_T(t)$, dove $\Pi_T(t)$ è il treno di impulsi a distanza T

$$\Pi_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_0(t - kT)$$

l'autocorrelazione di $y(t)$ è data da (regole del transito)

$$\begin{aligned} p_{yy}(\tau) &= \varepsilon_{gg}(\tau) * p_{\pi\pi}(\tau) = \varepsilon_{gg}(\tau) * \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_0(\tau - kT) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{gg}(\tau - kT) \end{aligned}$$

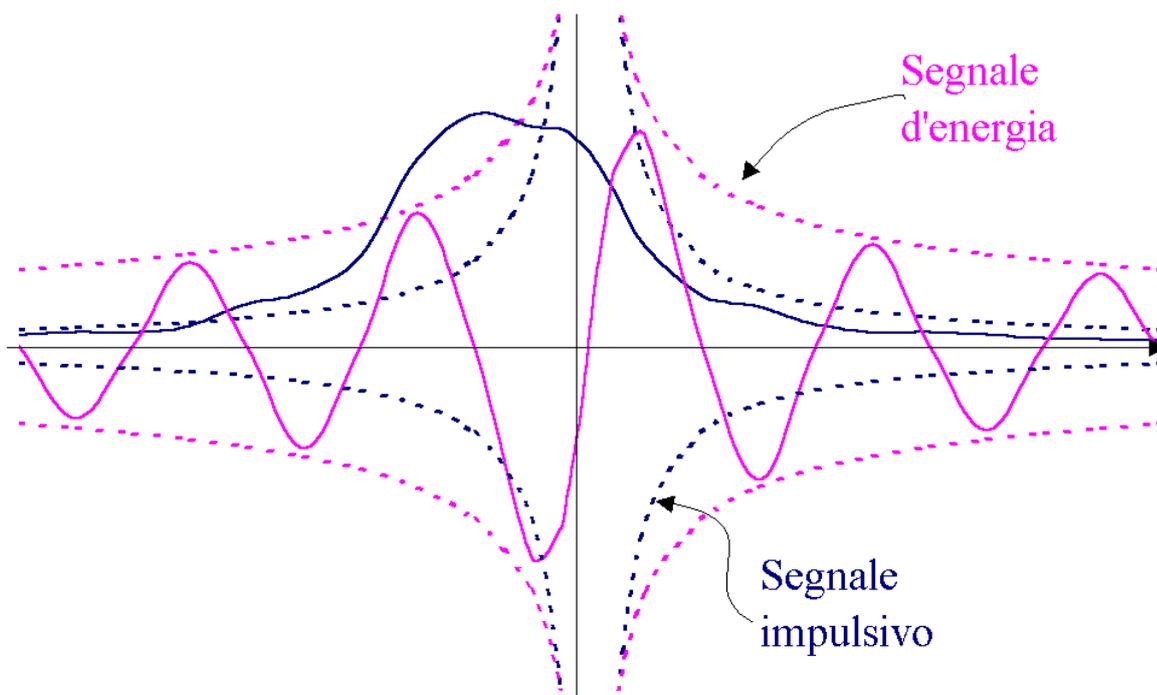
c.d.d.

SEGNALI IMPULSIVI

➤ **Def.:** Dato un segnale $x(t)$, esso si dice impulsivo se è **assolutamente sommabile** in $-\infty, +\infty$ cioè

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| d\tau < +\infty$$

○ Un segnale impulsivo ha durata finita o tende a zero con un ordine superiore a 1 . Un segnale di energia tende a zero con un ordine superiore a $1/2$. Pertanto, *un segnale impulsivo, limitato ovunque, è certamente di energia, mentre non è vero il contrario.*



TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ Dato un segnale **impulsivo** $x(t)$, esso ammette la seguente rappresentazione

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

dove la funzione

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

prende il nome di **Trasformata di Fourier** del segnale $x(t)$, e si indica con $X(f) = F\{x(t)\}$.

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ L'uguaglianza

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

va intesa come segue

- i. in tutti i punti in cui la funzione è *continua* il primo e il secondo membro **coincidono**
- ii. nei punti di *discontinuità di prima specie* l'integrale a secondo membro **converge alla semisomma dei limiti** da destra e da sinistra di $x(t)$

$$\frac{1}{2} \left[\lim_{t \rightarrow t_0^-} x(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} x(t) \right]$$

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

□ *Commento:* la famiglia di funzioni parametrizzate dalla frequenza f

$$s(t; f) = e^{j2\pi ft}$$

costituisce una **base** per i segnali impulsivi.

Tale base risulta **ortogonale**, infatti

$$\langle s(t; f_1), s(t; f_2) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(f_1 - f_2)t} dt = u_0(f_1 - f_2)$$

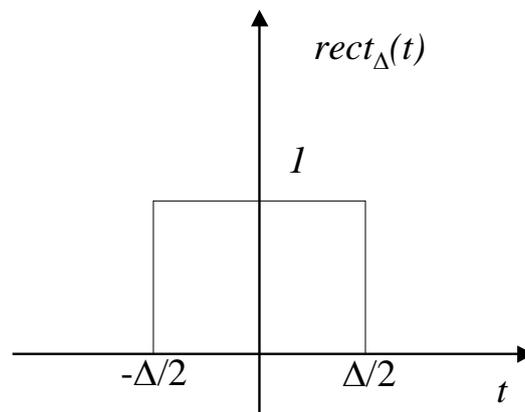
$X(f_0)$ rappresenta il coefficiente di $x(t)$ rispetto alla funzione

$$s(t; f_0) = e^{j2\pi f_0 t}.$$

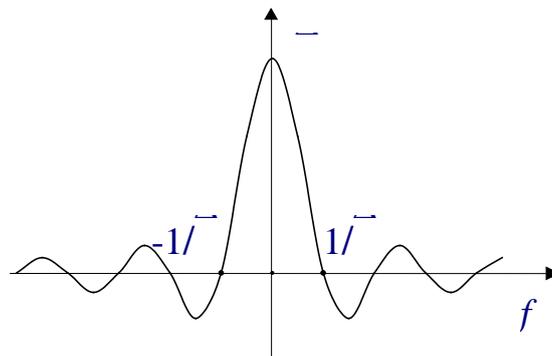
TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ Esempio

Trasformata del segnale $x(t)=\text{rect}_\Delta(t)$



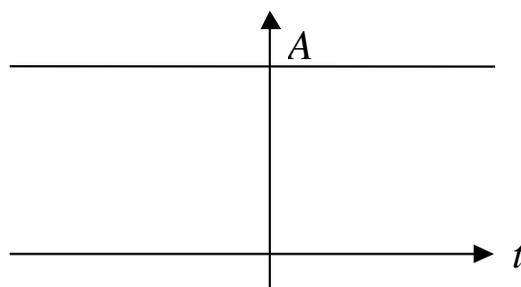
$$\begin{aligned} X(f) &= F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}_\Delta(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \Big|_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} = \Delta \frac{\sin(\pi\Delta f)}{\pi\Delta f} \\ &= \Delta \text{Ca}(\pi\Delta f) \end{aligned}$$



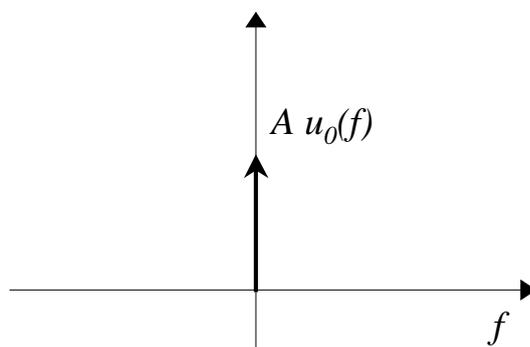
TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ Esempio

Trasformata del segnale $x(t)=A$



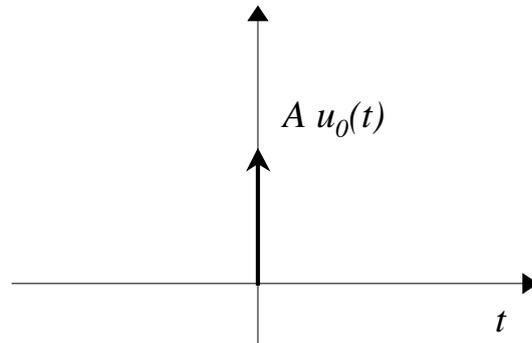
$$\begin{aligned} X(f) &= F\{A\} = F\left\{\lim_{\Delta \rightarrow \infty} A \operatorname{rect}_{\Delta}(t)\right\} = A \lim_{\Delta \rightarrow \infty} F\{\operatorname{rect}_{\Delta}(t)\} = \\ &= A \lim_{\Delta \rightarrow \infty} \Delta \operatorname{Ca}(\pi \Delta f) = A u_0(f) \end{aligned}$$



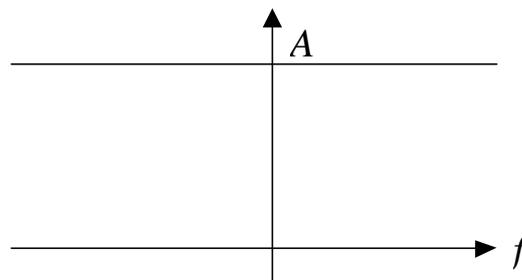
TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ *Esempio*

Trasformata del segnale $x(t)=A u_0(t)$



$$X(f) = F\{A u_0(t)\} = A \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt = A$$



□ **Commento:** la trasformata qui derivata in base alla rappresentazione integrale dell'impulso matematico, può ricavarsi anche come limite di una successione di $rect_{\Delta}(t)$ di area unitaria e base $\Delta \rightarrow 0$, ovvero dalla trasformata di una costante per la proprietà di dualità.

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ *Proprietà fondamentali:*

i. *linearità*

$$Ax(t) + By(t) \Leftrightarrow AX(f) + BY(f)$$

ii. *area sottesa ad una funzione*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = X(0), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df = x(0)$$

iii. *traslazione nel tempo*

$$x(t - \tau) \Leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f\tau}$$

Prova:

$$\begin{aligned} F\{x(t - \tau)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)e^{-j2\pi f(t - \tau)}e^{-j2\pi f\tau} dt \\ &= e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi)e^{-j2\pi f\xi} d\xi = e^{-j2\pi f\tau} X(f) \end{aligned}$$

□ La *traslazione* del segnale nel tempo cambia la **fase** ma non l'ampiezza della trasformata di Fourier. Si noti che per τ negativo il segnale è anticipato e la pendenza è positiva.

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ *Proprietà fondamentali (cont.):*

iv. *traslazione in frequenza*

$$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X(f - f_0)$$

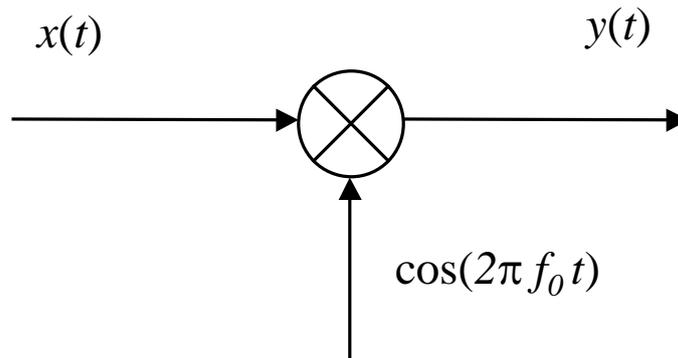
Prova:

$$\begin{aligned} F\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt \\ &= X(f - f_0) \end{aligned}$$

□ La moltiplicazione (*modulazione*) del segnale per un esponenziale complesso corrisponde ad una traslazione lungo l'asse delle frequenze

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ Esempio: **Modulazione**

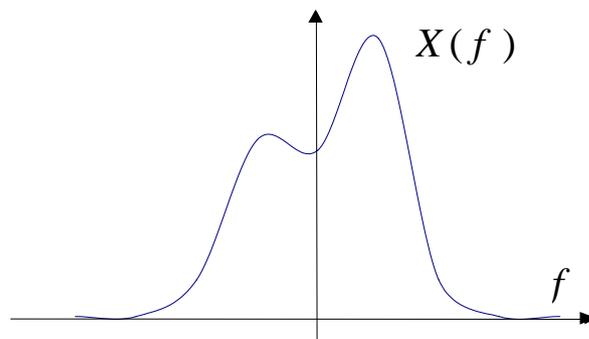


La moltiplicazione (**modulazione**) del segnale per un coseno a frequenza f_0 (**frequenza portante**) produce in frequenza due repliche alle frequenze $f_0, -f_0$

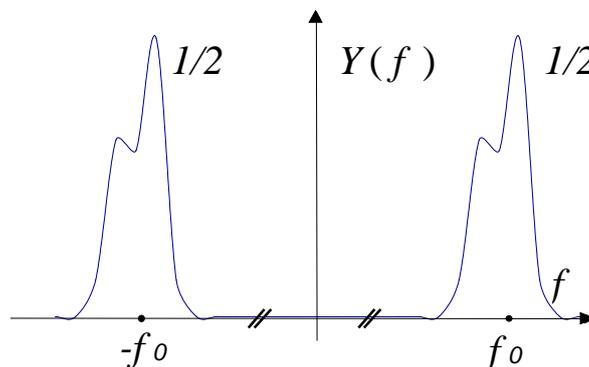
$$\begin{aligned} Y(f) &= F\{x(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = F\left\{x(t)\left(\frac{e^{-j2\pi f_0 t} + e^{j2\pi f_0 t}}{2}\right)\right\} = \\ &= \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0) \end{aligned}$$

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

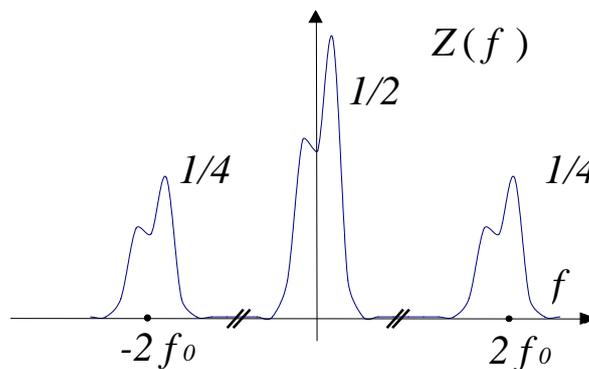
○ Esempio: **Modulazione e Demodulazione**



$$Y(f) = \frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$$

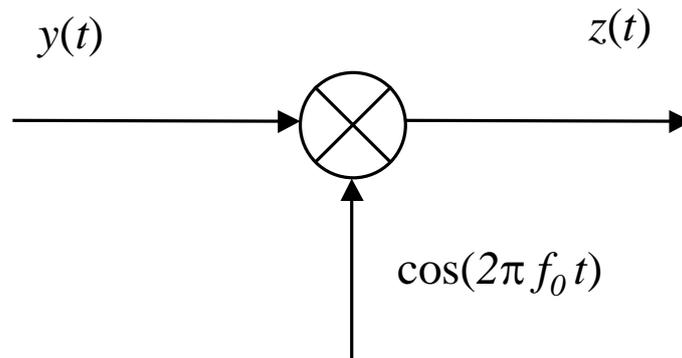


$$Z(f) = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{4}X(f - 2f_0) + \frac{1}{4}X(f + 2f_0)$$



TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ *Esempio:* **Demodulazione coerente**



La moltiplicazione del segnale modulato a frequenza f_0 per un coseno *alla stessa frequenza e fase* riproduce, alterato per un fattore di scala, lo spettro del segnale originario, sommato a due repliche alle frequenze $2f_0, -2f_0$

$$Z(f) = F\{y(t)\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}X(f) + \frac{1}{4}X(f - 2f_0) + \frac{1}{4}X(f + 2f_0)$$

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ *Trasformata di Fourier di un segnale periodico* è un treno di impulsi alle frequenze f_n , di ampiezza pari ai coefficienti della serie di Fourier del segnale.

Prova:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{j2\pi f_n t}$$

$$X(f) = F\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n F\{e^{j2\pi f_n t}\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n u_0(f - f_n)$$

- Un segnale periodico non è impulsivo, tuttavia la definizione – in senso limite- della trasformata di Fourier di una costante, ne consente la rappresentazione mediante trasformata di Fourier.

- La rappresentazione mediante trasformata di Fourier consente la *trattazione unificata nel dominio della frequenza* della elaborazione di un segnale periodico e di un segnale di energia.

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ *Trasformata di Fourier di un segnale periodico*

Esprimiamo il segnale tramite la *funzione generatrice* $g(t)$ di durata limitata al periodo T .

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT)$$

I coefficienti di Fourier del segnale sono proporzionali ai valori assunti dalla trasformata di Fourier $G(f)$ della funzione generatrice alle frequenze multiple della fondamentale n/T .

Prova:

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-j2\pi f_n t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j2\pi f_n t} dt = \frac{1}{T} G(f_n) \end{aligned}$$

- La trasformata di Fourier della funzione generatrice sottende lo spettro di Fourier di ogni segnale periodico che la ammette come generatrice.
- I valori dei coefficienti, e il loro fattore di scala, dipendono dal periodo T .

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ *Proprietà fondamentali (segue):*

v. *Differenziazione*

Dato un segnale $x(t)$ trasformabile secondo Fourier, supposto derivabile rispetto al tempo, con derivata ancora trasformabile secondo Fourier, vale la seguente relazione:

$$\frac{d}{dt}x(t) \Leftrightarrow j2\pi f X(f)$$

Prova: Sia

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

Derivando il primo e il secondo membro dell'equazione rispetto al tempo si ha

$$\frac{d}{dt}x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \frac{d}{dt} e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} [j2\pi f X(f)] e^{j2\pi ft} df$$

Inoltre, essendo il segnale derivata Fourier trasformabile si ha

$$\frac{d}{dt}x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F \left\{ \frac{d}{dt}x(t) \right\} e^{j2\pi ft} df$$

Dal confronto fra le ultime due relazioni segue la tesi. *c.d.d.*

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

Proprietà fondamentali (segue):

vi. *Integrazione (prima versione)*

Sia $x(t)$ un segnale integrabile trasformabile secondo Fourier, con integrale ancora trasformabile secondo Fourier. Allora:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

Prova: Sia

$$\begin{aligned} F \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) d \frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} = \\ &= \left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) \frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) \frac{e^{-j2\pi f t}}{-j2\pi f} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{e^{-j2\pi f t}}{j2\pi f} dt = \frac{1}{j2\pi f} X(f) \end{aligned}$$

dove si è sfruttata la seguente relazione

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi f t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right) e^{-j2\pi f t} = 0$$

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ *Proprietà fondamentali (segue):*

- ❑ *Commento:* L'integrazione abbatte le componenti ad alta frequenza del segnale. La differenziazione esalta le componenti ad alta frequenza del segnale.
- ❑ Ciò conferma, dal punto di vista spettrale, l'effetto temporale per cui l'integrazione smorza le variazioni temporali del segnale, mentre la differenziazione le accentua.

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ *Esempio* Trasformata del **gradino matematico** $x(t) = u_{-1}(t)$

$$u_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Il gradino $u_{-1}(t)$ può considerarsi come **limite** per $\alpha \rightarrow 0$ della famiglia di funzioni impulsive

$$x_{\alpha}(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 1/2 & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

aventi la seguente trasformata di Fourier

$$\begin{aligned} X_{\alpha}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_{\alpha}(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha + j2\pi f} = \frac{\alpha - j2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \end{aligned}$$

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ *Esempio* Trasformata del **gradino matematico** (*segue*)

La trasformata di Fourier del gradino $u_{-1}(t)$ è una funzione complessa la cui parte reale (immaginaria) è ottenuta come **limite** della parte reale (immaginaria) di $x_{\alpha}(t)$.

$$X(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} X_{\alpha}(f) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} + j \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

La parte reale di $X_{\alpha}(f)$ tende ad un impulso matematico di area $1/2$; la parte immaginaria vale uniformemente 0 per $f=0$ e tende a $1/(j2\pi f)$ per $f \neq 0$:

$$X(f) = \frac{1}{2}u_0(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

Proprietà fondamentali (segue):

vii. *Integrazione (seconda versione)*

Sia $x(t)$ un segnale integrabile. L'integrale

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

può pensarsi ottenuto come l'uscita di un filtro avente come risposta impulsiva il gradino matematico $u_{-1}(t)$, cioè

$$y(t) = x(t) * u_{-1}(t)$$

Ne segue che

$$Y(f) = X(f) \cdot \left[\frac{1}{2} u_0(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right] = \frac{1}{2} X(0) u_0(f) + \frac{1}{j2\pi f} X(f)$$

La proprietà di integrazione è così estesa a segnali a valor medio non nullo ($X(0) \neq 0$).

□ **Commento:** Segnali che differiscono per una costante additiva, pur ammettendo la stessa derivata, hanno trasformate differenti.

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ *Proprietà fondamentali (segue):*

viii. *Intercorrelazione*

$$e_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt \quad \Leftrightarrow \quad E_{xy}(f) = X^*(f) Y(f)$$

Prova: Dati due segnali impulsivi $x(t)$ e $y(t)$, l'intercorrelazione è ancora un segnale impulsivo ed è pari a

$$\begin{aligned} e_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) e^{-j2\pi ft} df \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y(\zeta) e^{j2\pi \zeta (t + \tau)} d\zeta \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) Y(\zeta) e^{j2\pi \zeta \tau} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f - \zeta)t} dt \right) d\zeta df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) Y(\zeta) e^{j2\pi \zeta \tau} \delta(f - \zeta) d\zeta df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) Y(f) e^{j2\pi f \tau} df \end{aligned}$$

TEOREMA DI PARSEVAL PER SEGNALI IMPULSIVI.

➤ *Teorema di Parseval per segnali impulsivi.* Dato un segnale impulsivo $x(t)$, ed indicata con $X(f)$ la trasformata di Fourier relativa, la sua energia E_x è pari a:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

□ *Prova:* Poiché l'energia è pari alla funzione di autocorrelazione del segnale calcolata nell'origine si ha

$$E_x = e_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)X^*(f) e^{j2\pi f \cdot 0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

c.d.d.

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

Proprietà fondamentali (segue):

ix. Cambiamento di scala

$$F\{x(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$$

Prova:

$$\begin{aligned} F\{x(\alpha t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha t) e^{-j2\pi \left(\frac{f}{\alpha}\right)(\alpha t)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) e^{-j2\pi \left(\frac{f}{\alpha}\right)\xi} \frac{1}{|\alpha|} d\xi = \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{f}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

□ **Commento:** Il cambiamento di scala è un'operazione geometrica in cui l'asse dei tempi è espanso, compresso o ribaltato. Ad una compressione (espansione) dell'asse dei tempi corrisponde una espansione (compressione) dell'asse delle frequenze.

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ *Proprietà fondamentali (segue):*

x. *Convoluzione*

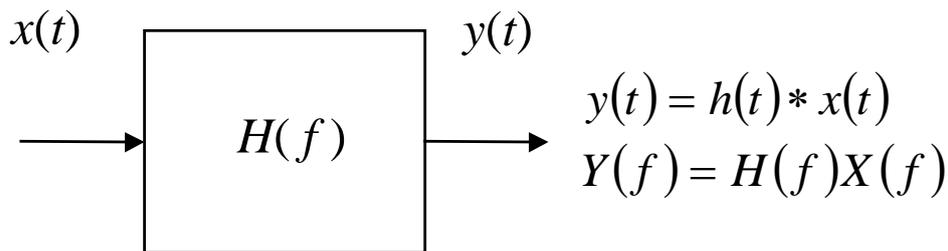
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow X(f)Y(f)$$

Prova: Dati due segnali impulsivi $x(t)$ e $y(t)$, la convoluzione è ancora un segnale impulsivo la cui trasformata di Fourier è

$$\begin{aligned} F\{x(t)*y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-\tau)e^{-j2\pi ft} dt \right) x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f)e^{-j2\pi f\tau} x(\tau)d\tau = \\ &= X(f)Y(f) \end{aligned}$$

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ *Esempio:* **Relazione ingresso-uscita di un filtro**



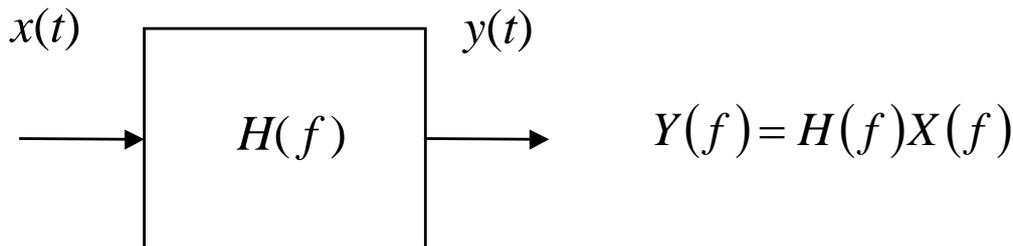
Prova: La relazione segue direttamente dalla proprietà di convoluzione nel tempo.

- La trasformata di Fourier della risposta impulsiva di un filtro prende il nome di **funzione di trasferimento** del filtro stesso.
- La funzione di trasferimento $H(f)$ del filtro può essere valutata imponendo un un segnale di ingresso noto $X(f)$ non nullo nell'intervallo di frequenza di interesse e misurando l'uscita $H(f)$ del filtro:

$$H(f) = Y(f) / X(f)$$

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ **Esempio: Misura della funzione di trasferimento di un filtro**



➤ Sia $h(t)$ reale (filtro idealmente realizzabile). La funzione di trasferimento del filtro $H(f) = M(f)e^{j\varphi(f)}$ è dunque a simmetria coniugata, cioè $H(f) = H^*(-f)$.

➤ In presenza di un ingresso cosinusoidale

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \psi)$$

l'uscita è ancora un segnale cosinusoidale alla frequenza f_0

$$y(t) = M(f_0)A \cos(2\pi f_0 t + \psi + \varphi(f_0))$$

scalato di $M(f_0)$ e sfasato di $\varphi(f_0)$ (ritardato di $\varphi(f_0)/(2\pi f_0)$).

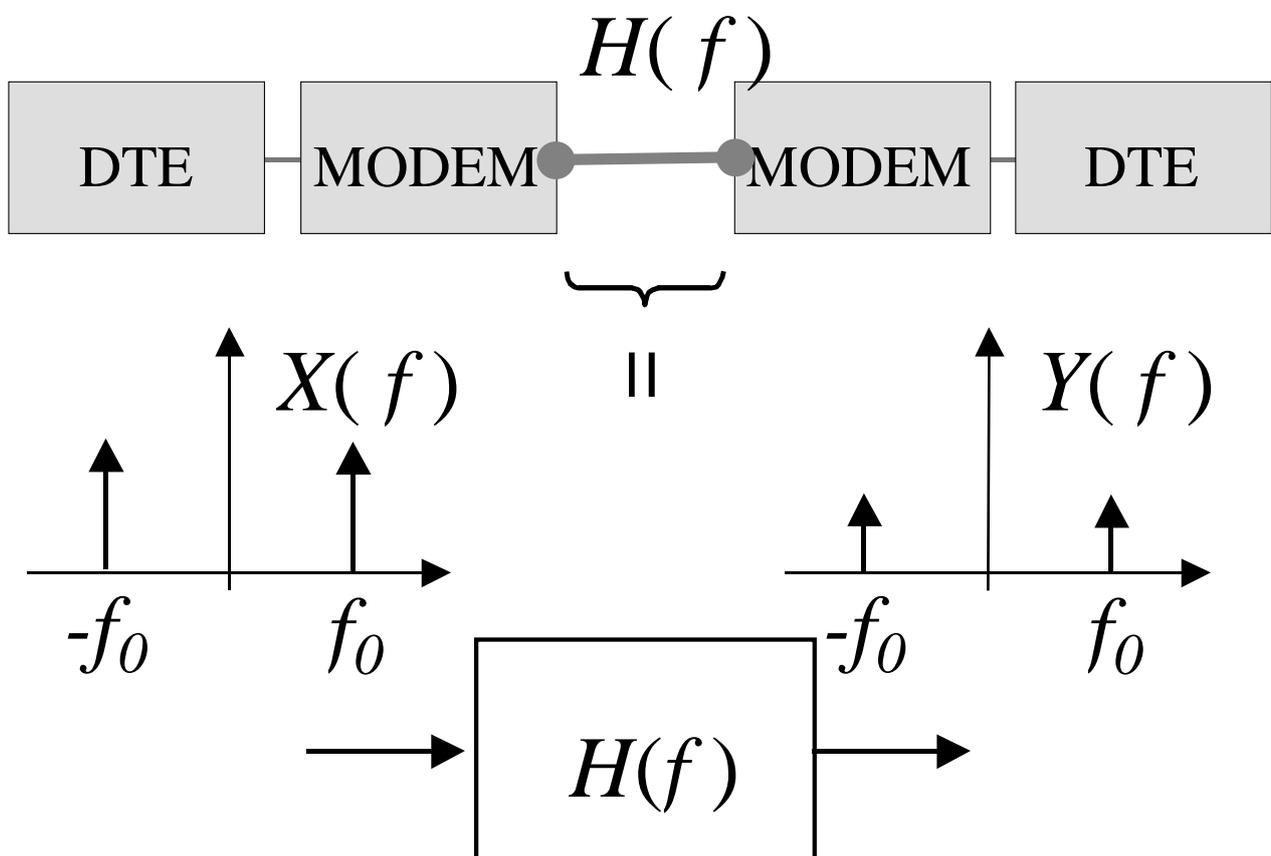
Prova:

$$\begin{aligned} Y(f) &= H(f) \cdot A/2 \left(e^{+j\psi} u_0(f - f_0) + e^{-j\psi} u_0(f + f_0) \right) \\ &= H(f_0)A/2 e^{+j\psi} u_0(f - f_0) + H(-f_0)A/2 e^{-j\psi} u_0(f + f_0) \end{aligned}$$

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ *Esempio:*

La *misura della attenuazione introdotta da una linea telefonica* avviene mediante trasmissione di un tono di prova, cioè un segnale cosinusoidale a frequenza $f_0=800 \text{ Hz}$ -standard europeo- o a frequenza $f_0=1000 \text{ Hz}$ -standard USA-, ovvero ad una successione di toni di prova all'interno della banda utile $300 \div 3400 \text{ Hz}$.



TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

➤ *Proprietà fondamentali (segue):*

xi. *Prodotto*

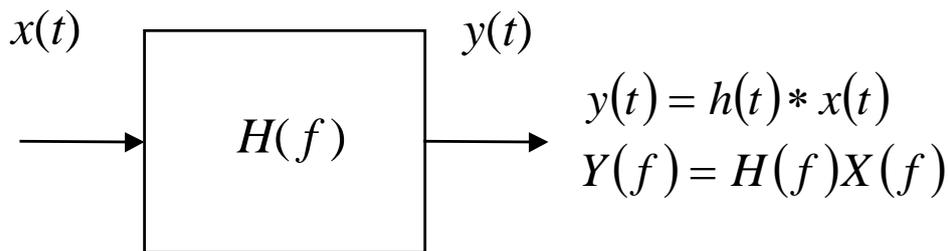
$$x(t)y(t) \Leftrightarrow X(f)*Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi - f)Y(\xi) d\xi$$

Prova: Dati due segnali impulsivi $x(t)$ e $y(t)$, il loro prodotto è ancora un segnale impulsivo la cui trasformata di Fourier è

$$\begin{aligned} F\{x(t)y(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\zeta)Y(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+j2\pi(\xi+\zeta-f)t} dt \right) d\zeta d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\zeta)Y(\xi) \delta(\xi + \zeta - f) d\zeta d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\zeta)Y(f - \zeta) d\zeta \end{aligned}$$

TRASFORMATA DI FOURIER PER SEGNALI IMPULSIVI

○ *Esempio:* **Relazione ingresso-uscita di un filtro**

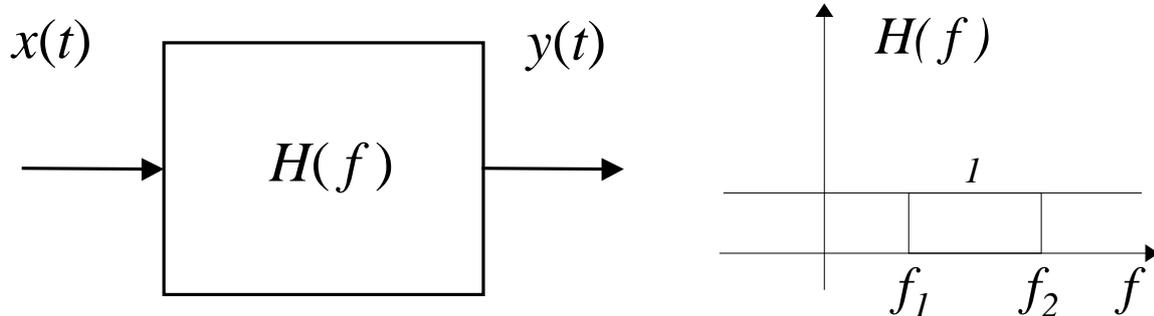


Prova: La relazione segue direttamente dalla proprietà di convoluzione nel tempo.

- La trasformata di Fourier della risposta impulsiva di un filtro prende il nome di **funzione di trasferimento** del filtro stesso.
- La funzione di trasferimento $H(f)$ del filtro può essere valutata imponendo un un segnale di ingresso noto $X(f)$ non nullo nell'intervallo di frequenza di interesse e misurando l'uscita $H(f)$ del filtro:

$$H(f) = Y(f) / X(f)$$

TEOREMA DI WIENER



- Si dice **Potenza di un segnale di potenza $x(t)$, contenuta fra f_1 e f_2** la potenza totale del segnale $y(t)$ ottenuto applicando $x(t)$ in ingresso ad un filtro con funzione di trasferimento $H(f)$ pari a 1 fra f_1 e f_2 e zero altrove:

$$P_x(f_1, f_2) \stackrel{def.}{=} P_y$$

- Si dice **Energia di un segnale impulsivo $x(t)$, contenuta fra f_1 e f_2** l'energia totale del segnale $y(t)$ ottenuto applicando $x(t)$ in ingresso ad un filtro con funzione di trasferimento $H(f)$ pari a 1 fra f_1 e f_2 e zero altrove:

$$E_x(f_1, f_2) \stackrel{def.}{=} E_y$$

TEOREMA DI WIENER

- *Teorema di Wiener per segnali di potenza:* Dato un segnale di potenza $x(t)$, lo spettro di densità di potenza di $x(t)$ è uguale alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione

$$P_{xx}(f) = F\{p_{xx}(\tau)\}$$

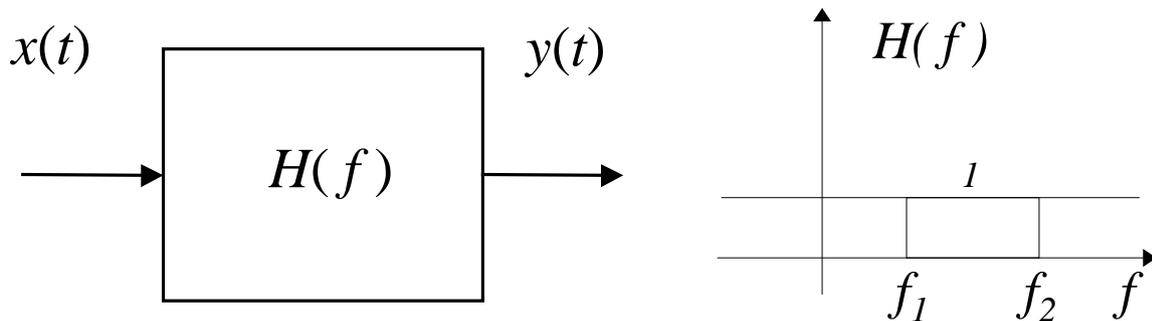
- *Corollario:* La potenza del segnale $x(t)$ è uguale all'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ dello spettro di densità di potenza di $x(t)$

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{xx}(f)$$

TEOREMA DI WIENER

➤ Teorema di Wiener per segnali di potenza (segue)

Prova: Con riferimento allo schema in figura:



la potenza del segnale $x(t)$ contenuta fra f_1 e f_2 è pari all'autocorrelazione del segnale $y(t)$ calcolata nell'origine, ovvero all'integrale della relativa trasformata di Fourier.

Dalle regole del transito, segue:

$$\begin{aligned}
 P_x(f_1, f_2) &\stackrel{def.}{=} P_y = p_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F\{p_{yy}(\tau)\}df = \int_{-\infty}^{+\infty} F\{p_{xx}(\tau) * \varepsilon_{hh}(\tau)\}df \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} F\{p_{xx}(\tau)\} \cdot |H(f)|^2 df = \int_{f_1}^{f_2} F\{p_{xx}(\tau)\}df = \int_{f_1}^{f_2} P_{xx}(f)df
 \end{aligned}$$

c.d.d.

TEOREMA DI WIENER

- *Teorema di Wiener per segnali di energia:* Dato un segnale di energia $x(t)$, lo spettro di densità di energia di $x(t)$ è uguale alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione, ovvero al modulo quadrato della trasformata di Fourier di $x(t)$.

$$E_{xx}(f) = F\{\varepsilon_{xx}(\tau)\} = |X(f)|^2$$

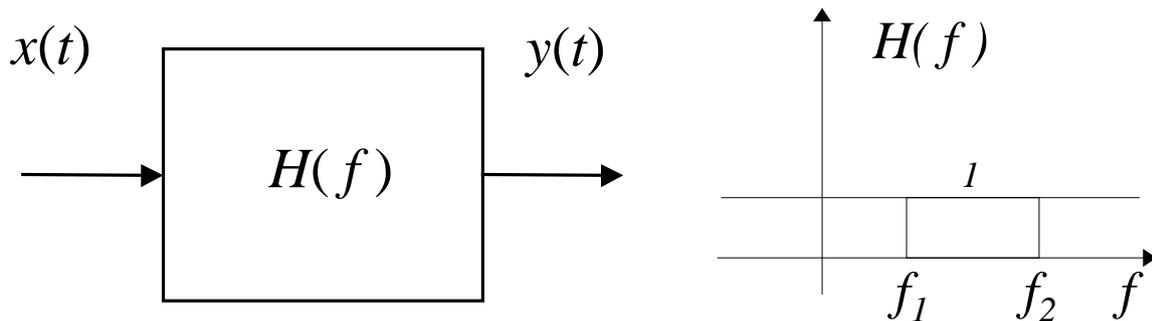
- *Corollario:* L'energia del segnale $x(t)$ è uguale all'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ dello spettro di densità di energia di $x(t)$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{xx}(f)$$

TEOREMA DI WIENER

➤ Teorema di Wiener per segnali di energia (segue)

Prova: Con riferimento allo schema in figura:



l'energia del segnale $x(t)$ contenuta fra f_1 e f_2 è pari all'autocorrelazione del segnale $y(t)$ calcolata nell'origine, ovvero all'integrale della relativa trasformata di Fourier.

Dalle regole del transito, segue:

$$\begin{aligned}
 E_x(f_1, f_2) &\stackrel{\text{def.}}{=} E_y = \varepsilon_{yy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F\{\varepsilon_{yy}(\tau)\}df = \int_{-\infty}^{+\infty} F\{\varepsilon_{xx}(\tau) * \varepsilon_{hh}(\tau)\}df \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} F\{\varepsilon_{xx}(\tau)\} \cdot |H(f)|^2 df = \int_{f_1}^{f_2} F\{\varepsilon_{xx}(\tau)\}df = \int_{f_1}^{f_2} E_{xx}(f)df
 \end{aligned}$$

Inoltre

$$F\{\varepsilon_{xx}(\tau)\} = F\{x^*(-\tau) * x(\tau)\} = F\{x^*(-\tau)\}F\{x(\tau)\} = X^*(f)X(f) = |X(f)|^2$$

c.d.d.

TRASFORMATA DI HILBERT

➤ *Def.* Dato un segnale $x(t)$ si dice **Trasformata di Hilbert** di $x(t)$ il segnale $\hat{x}(t) = \mathbf{H} \{x(t)\}$ ottenuto dal transito attraverso il filtro con funzione di trasferimento:

$$H_H(f) = \begin{cases} j & f < 0 \\ 0 & f = 0 \\ -j & f > 0 \end{cases}$$

ovvero con risposta impulsiva $h_H(t) = 1/\pi t$.

➤ *Proprietà:*

1. $\mathbf{H} \{c\} = 0$

2. due segnali che differiscono per una costante hanno la stessa trasformata di Hilbert.

➤ *Teorema:* Dato un segnale $x(t)$ **a valor medio nullo**, la sua trasformata di Hilbert $\hat{x}(t) = \mathbf{H} \{x(t)\}$ costituisce una rappresentazione di $x(t)$ nel dominio del tempo.

Dim. Poichè $H_H(f)H_H(f) = -1 \quad \forall f \neq 0$ e $x(t)$ è *a valor medio nullo*,

$$x(t) = -\mathbf{H} \{\hat{x}(t)\}.$$

TRASFORMATA DI HILBERT

➤ *Teorema:* dato un segnale reale $x(t)$ a valor medio nullo, il segnale e la sua trasformata di Hilbert sono ortogonali, ovvero

$$\langle \hat{x}(t), x(t) \rangle = 0$$

Dim. Si osservi che, in virtù delle proprietà delle trasformazioni lineari dei segnali, il prodotto scalare tra il segnale e la sua trasformata di Hilbert può essere scritto come segue

a) segnali di energia

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}(t), x(t) \rangle &= e_{x\hat{x}}(0) = [e_{xx}(t) * h_H(t)]_{t=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e_{xx}(\tau) \frac{1}{\pi(0-\tau)} d\tau, \end{aligned}$$

a) segnali di potenza

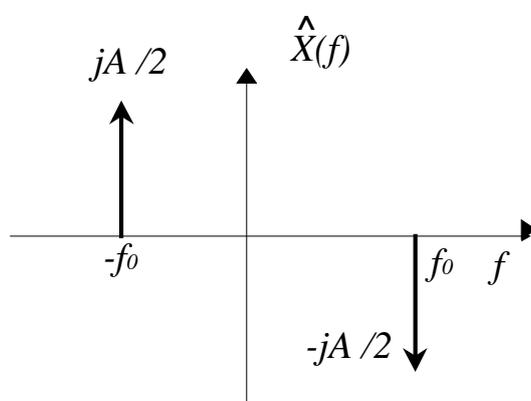
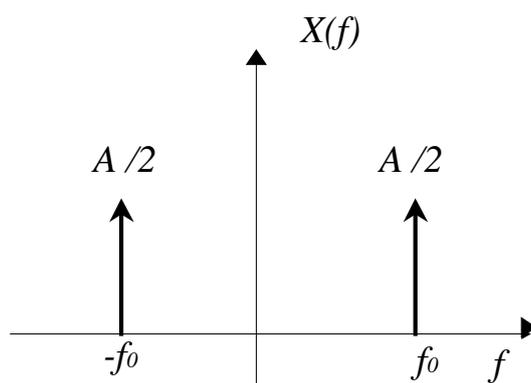
$$\begin{aligned} \langle \hat{x}(t), x(t) \rangle &= p_{x\hat{x}}(0) = [p_{xx}(t) * h_H(t)]_{t=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{xx}(\tau) \frac{1}{\pi(0-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Essendo il segnale reale la sua funzione di autocorrelazione è un segnale pari, e quindi l'integrando è una funzione dispari. Di conseguenza, il prodotto scalare è nullo, c.d.d.

TRASFORMATA DI HILBERT

➤ *Esempio.* Trasformata di Hilbert di un segnale cosinusoidale

$$x(t) = \cos(2 \pi f_0 t)$$



$$H\{x(t)\} = \sin(2 \pi f_0 t)$$

SEGNALE ANALITICO

➤ *Def.* Dato un segnale *reale* $x(t)$, si dice *Segnale analitico* ad esso associato il segnale $x^+(t)$ ottenuto dal transito attraverso un filtro con funzione di trasferimento:

$$H_a(f) = \begin{cases} 1 & f > 0 \\ 1/2 & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$

➤ Poichè $H_a(f) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}jH_H(f)$,

$$x^+(t) = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}j\hat{x}(t). \quad (1)$$

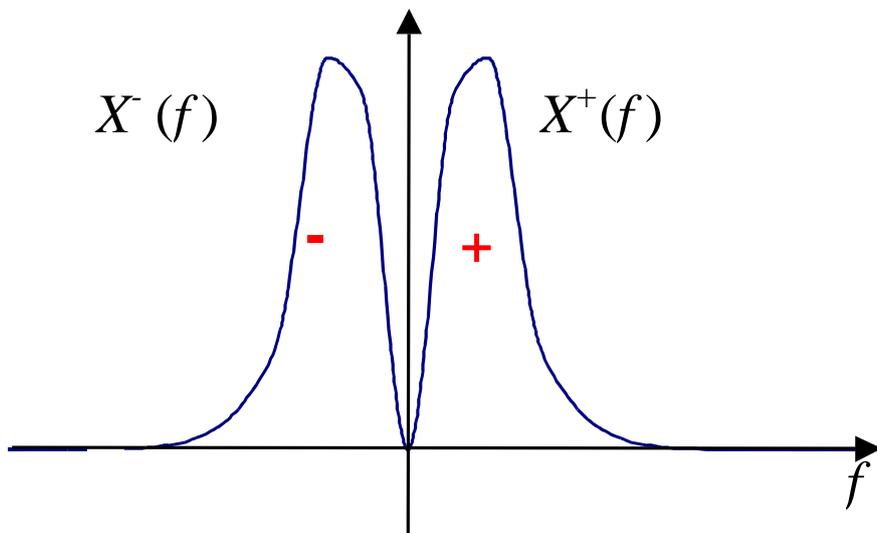
➤ *Teorema:* Dato un segnale $x(t)$ *reale a valor medio nullo*, il segnale analitico $x^+(t)$ ad esso associato costituisce una rappresentazione di $x(t)$ nel dominio del tempo, essendo

$$x(t) = 2\text{Re} \{x^+(t)\}. \quad (2)$$

Dim. Dalla (1) segue che se $x(t)$ è reale, anche $\hat{x}(t)$ è reale, e quindi il segnale analitico $x^+(t)$ è un segnale complesso la cui parte reale è proporzionale a $x(t)$, che pertanto può essere ricostruito tramite la (2). Tale proprietà non sussiste se $x(t)$ è complesso.

SEGNALE ANALITICO

➤ Oss. Il filtro analitico rimuove metà dello spettro del segnale, il contenuto per frequenze negative $X^-(f)$.



Se un segnale $x(t)$, Fourier-trasformabile, è reale, la sua Trasformata di Fourier $X(f)$ gode della proprietà:

$$X(-f) = X^*(f),$$

ovvero

$$X^-(f) = \left[X^+(-f) \right]^*, \quad f < 0$$

Di conseguenza il contenuto per frequenze negative $X^-(f)$ può essere ricostruito a partire dalla conoscenza del contenuto per frequenze positive $X^+(f)$

INVILUPPO COMPLESSO

- *Def.* Dato un segnale *reale* $x(t)$, si dice *inviluppo complesso* ad esso associato *rispetto alla frequenza* f_0 il segnale $\underline{x}(t)$ definito da:

$$\underline{x}(t) = 2x^+(t)e^{-j2\pi f_0 t}$$

ovvero

$$\underline{X}(f) = 2X^+(f + f_0)$$

- Poichè, in generale, $\underline{X}(f)$ non gode di proprietà di simmetria rispetto all'origine, $\underline{x}(t)$ è complesso
- Posto

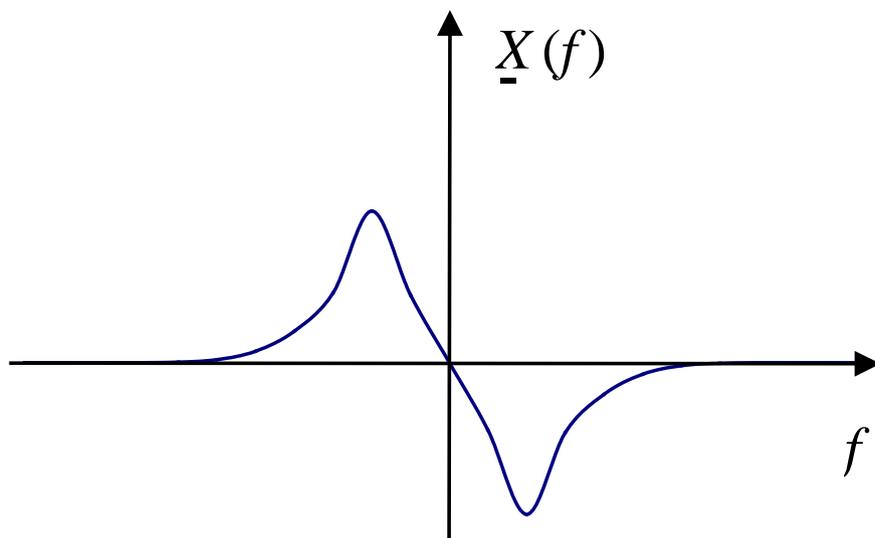
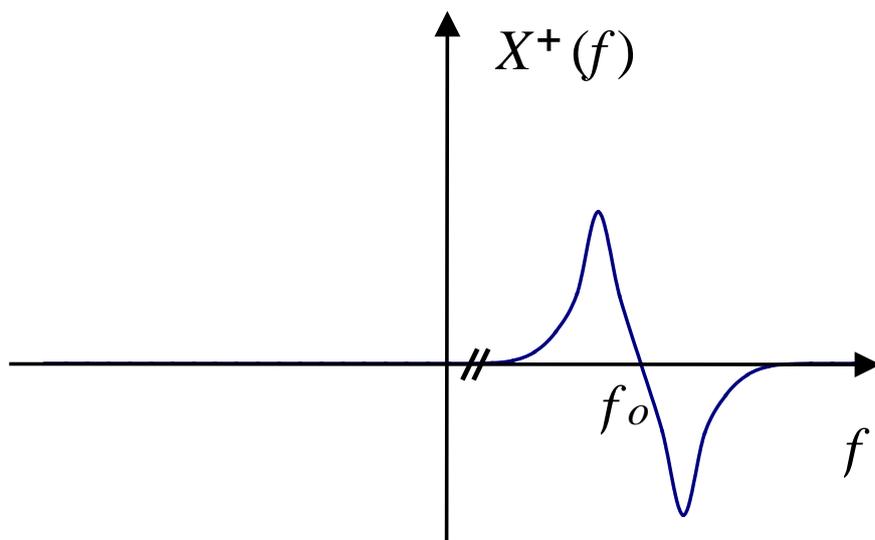
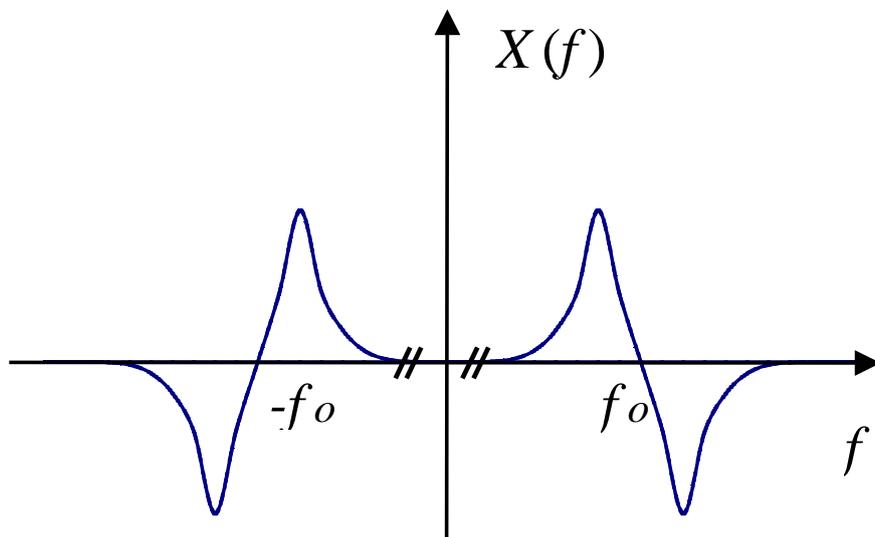
$$\underline{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t)$$

i segnali $x_c(t)$ e $x_s(t)$ prendono il nome di *componenti analogiche di bassa frequenza* del segnale rispetto alla frequenza f_0 . In particolare, si definisce

$x_c(t)$: componente analogica di bassa frequenza in fase

$x_s(t)$: componente analogica di bassa frequenza in quadratura.

SEGNALE ANALITICO E INVILUPPO COMPLESSO: INTERPRETAZIONE SPETTRALE



INVILUPPO COMPLESSO (SEGUE)

- *Teorema.* Dato un segnale $x(t)$ reale, esso è legato alle sue componenti analogiche di bassa frequenza dalla relazione

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

Inoltre per la sua Trasformata di Hilbert si ha

$$\hat{x}(t) = x_c(t) \sin(2\pi f_0 t) + x_s(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi f_0 t) & -\sin(2\pi f_0 t) \\ \sin(2\pi f_0 t) & \cos(2\pi f_0 t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix}.$$

INVILUPPO COMPLESSO (SEGUE)

➤ *Esempio.* Inviluppo complesso di un segnale cosinusoidale

$$x(t) = \cos(2\pi f_1 t)$$

rispetto alla frequenza f_0 . Risulta:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(2\pi f_1 t) = \cos(2\pi(f_1 - f_0)t + 2\pi f_0 t) = \\ &= \cos(2\pi(f_1 - f_0)t)\cos(2\pi f_0 t) - \sin(2\pi(f_1 - f_0)t)\sin(2\pi f_0 t) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \cos(2\pi(f_1 - f_0)t) \\ x_s(t) &= \sin(2\pi(f_1 - f_0)t) \end{aligned}$$

○ *Commento:* Lo sviluppo di un segnale in componenti analogiche di bassa frequenza equivale alla rappresentazione dello stesso in una base temporalmente variante, rispetto a cui il segnale varia più lentamente.

INVILUPPO COMPLESSO (SEGUE)

➤ *Teorema:*

Se il segnale $x(t)$ è reale e *limitato in banda* $[f_0 - w, f_0 + w]$, le sue componenti analogiche di bassa frequenza rispetto alla frequenza f_0 risultano limitate nella banda $[-w, +w]$.

○ *Commento:*

Per $f_0 \gg w$, la rappresentazione del segnale in funzione dei campioni delle componenti analogiche di bassa frequenza è estremamente efficiente.

- ❑ La rappresentazione di $x(t)$ in funzione dei suoi campioni richiede un periodo di campionamento

$$T_c \leq T_{\max} = 1/(2(f_0 + w)).$$

- ❑ La rappresentazione di $x(t)$ in funzione dei campioni delle componenti analogiche di bassa frequenza $x_c(t)$, $x_s(t)$ richiede il campionamento di due segnali con periodo

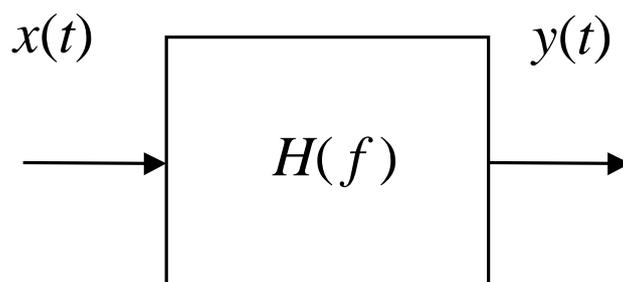
$$T'_c \leq T'_{\max} = 1/(2w).$$

- ❑ Il rapporto fra il numero di campioni nell'unità di tempo necessari nei due casi è

$$(f_0 + w)/(2 \times w).$$

TRANSITO IN UN SISTEMA LINEARE

➤ Sia $x(t)$ un segnale *reale* a valor medio nullo che transita in un filtro lineare idealmente realizzabile ($h(t)$ *reale*).



Valgono le seguenti relazioni:

a)
$$\underline{y}^+(t) = \underline{x}^+(t) * \underline{h}^+(t)$$

b)
$$\underline{y}(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) * \underline{h}(t)$$

Dim. propr. a) In relazione al segnale analitico si ha:

$$\begin{aligned} \underline{y}^+(t) &= \underline{y}(t) * h_a(t) = \underline{x}(t) * h(t) * h_a(t) * h_a(t) \\ &= \underline{x}(t) * h_a(t) * h(t) * h_a(t) = \underline{x}^+(t) * \underline{h}^+(t) \end{aligned}$$

c.d.d.

MODULAZIONE D'AMPIEZZA A PORTANTE SINUSOIDALE

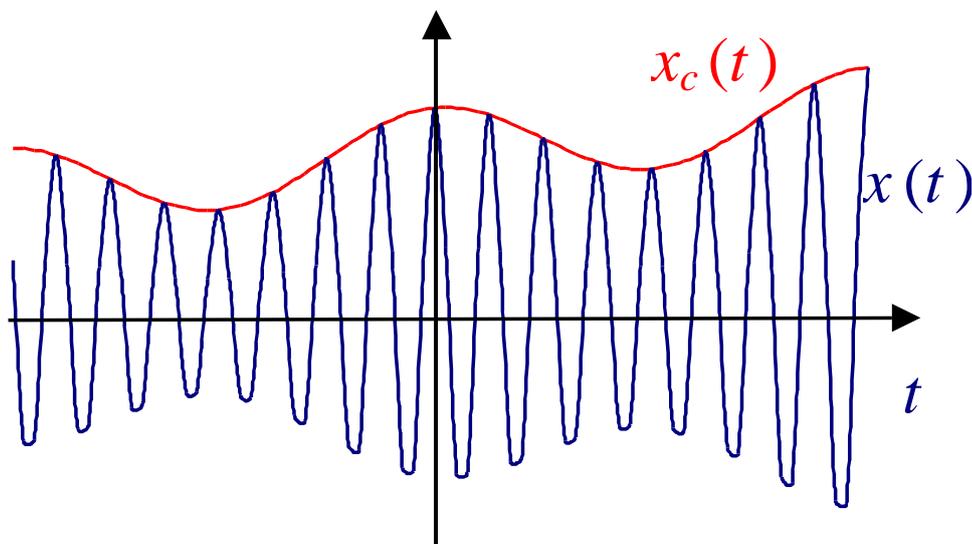
Modulazione a Banda Laterale Doppia (Double Side Band-DSB)

➤ Sia $m(t)$ un segnale reale, a valor medio nullo, limitato nella banda $[-w, +w]$ che rappresenta il messaggio da trasmettere, il segnale trasmesso $x(t)$ (*segnale modulato*) è sintetizzato in modo tale che $x_c(t)$ sia proporzionale al messaggio da trasmettere (*segnale modulante*).

$$\begin{cases} x_c(t) = a_p + k_a m(t) \\ x_s(t) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$x(t) = [a_p + k_a m(t)] \cos(2\pi f_p t)$$

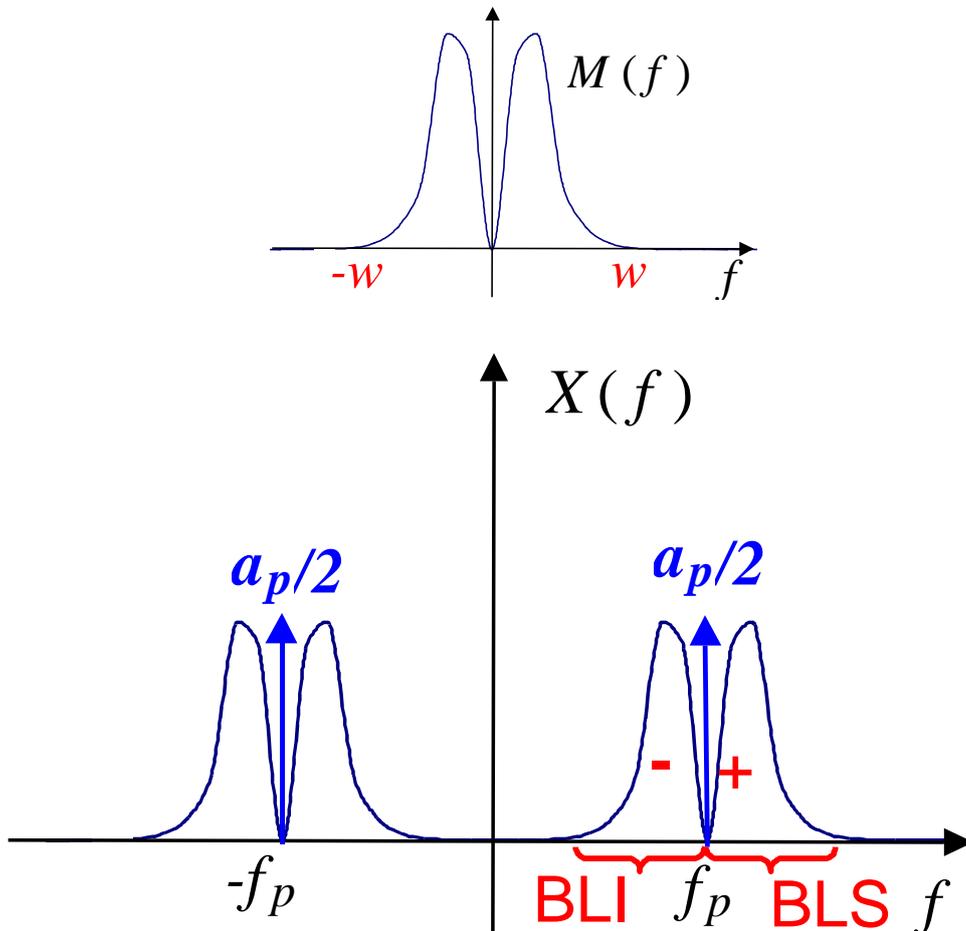


MODULAZIONE D'AMPIEZZA BLD

□ Poiché

$$X(f) = \frac{1}{2} (a_p u_0(f - f_p) + k_a M(f - f_p)) + \frac{1}{2} (a_p u_0(f + f_p) + k_a M(f + f_p))$$

il segnale modulato occupa una banda di ampiezza $2w$ centrata intorno a f_p (e a $-f_p$).



○ $[f_p, f_p+w]$: Banda Laterale Superiore

○ $[f_p-w, f_p]$: Banda Laterale Inferiore

➤ La modulazione è detta a Banda Laterale Doppia.

MODULAZIONE D'AMPIEZZA BLD

A seconda dell'ampiezza della portante la modulazione BLD viene classificata come

➤ **A portante intera (BLD-PI)**

$$a_p + k_a m(t) > 0 \quad \forall t$$

(ovvero $a_p > k_a \text{Max}_t [|m(t)|]$)

L'ampiezza del segnale modulato è sempre positiva: ciò offre la possibilità di utilizzare uno *schema di demodulazione* (recupero del segnale modulante) piuttosto semplice.

➤ **A portante ridotta (BLD-PR)**

$$a_p < k_a \text{Max}_t [|m(t)|]$$

La componente cosinusoidale residua semplifica l'operazione di *estrazione della portante* (frequenza e fase) in ricezione.

➤ **A portante soppressa (BLD-PS, Suppressed Carrier SC)**

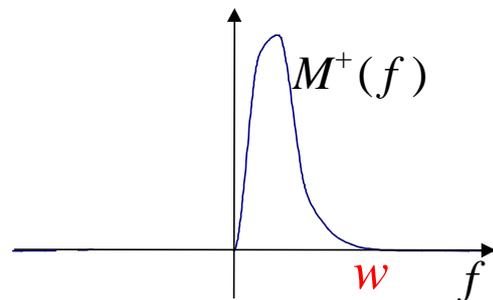
$$a_p = 0$$

La potenza totale del segnale modulato è totalmente impiegata per convogliare il messaggio $m(t)$.

MODULAZIONE D'AMPIEZZA BLU (O SSB)

➤ Sia $m(t)$ un segnale reale, a valor medio nullo, limitato nella banda $[-w, +w]$, il segnale trasmesso $x(t)$ è sintetizzato in modo tale che l'inviluppo complesso $\underline{x}(t)$ sia proporzionale al *segnale analitico* associato al messaggio da trasmettere

$$m^+(t) = \frac{1}{2}m(t) + j\frac{1}{2}\hat{m}(t)$$



ovvero

$$\square \begin{cases} x_c(t) = \frac{1}{2}k_a m(t) \\ x_s(t) = \frac{1}{2}k_a \hat{m}(t) \end{cases}$$

$$\square x(t) = \frac{1}{2} \left\{ k_a m(t) \cos(2\pi f_p t) - k_a \hat{m}(t) \sin(2\pi f_p t) \right\}$$

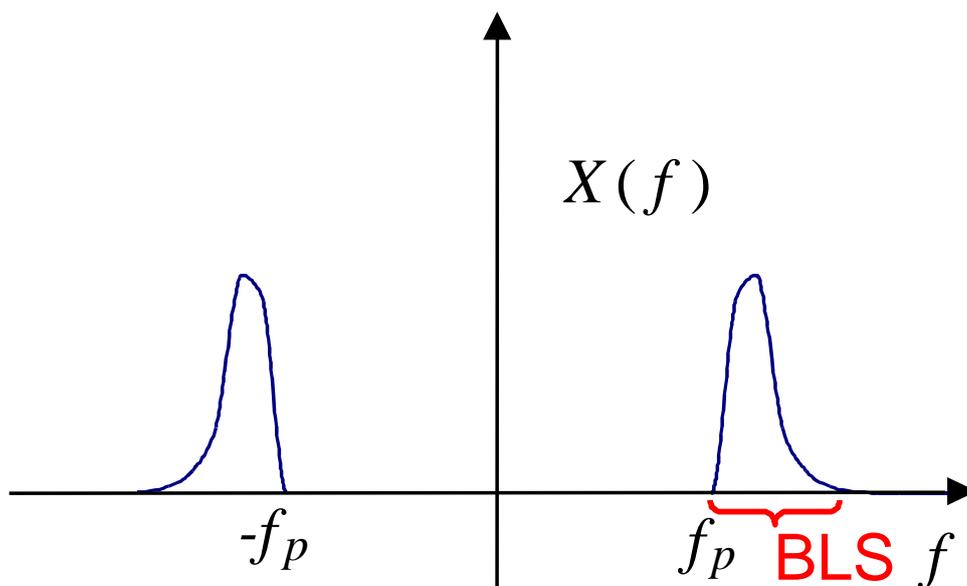
MODULAZIONE D'AMPIEZZA BLU (O SSB)

□ Poichè

$$X(f) = \frac{1}{2} [k_a M^+(f - f_p) + k_a M^-(f + f_p)]$$

Il segnale modulato occupa la sola **Banda Laterale Superiore**

$[f_p, f_p + w]$

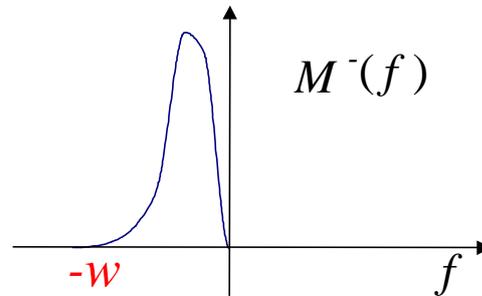


➤ **La modulazione è detta a Banda Laterale Unica.**

MODULAZIONE D'AMPIEZZA BLU (O SSB)

➤ Analogamente può essere trasmesso il contenuto a frequenze negative di $m(t)$,

$$m^-(t) = \frac{1}{2}m(t) - \frac{1}{2}j\hat{m}(t).$$

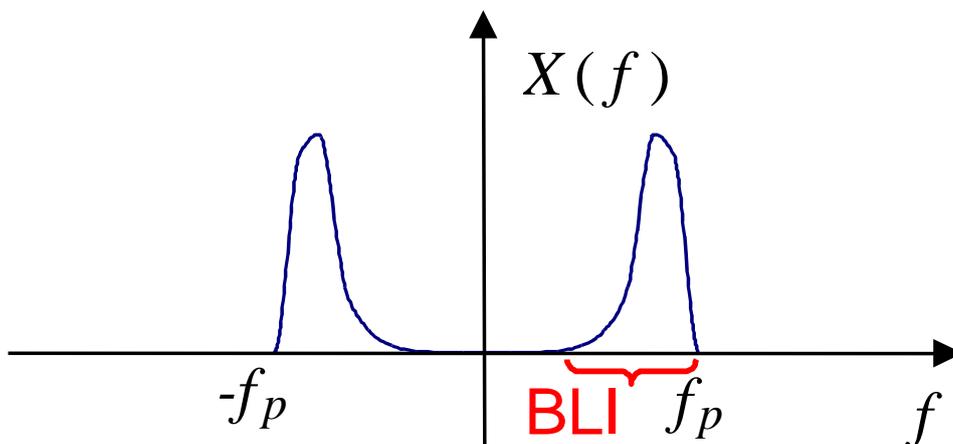


➤ In tal caso risulta

$$\square x_c(t) = \frac{1}{2}k_a m(t), \quad x_s(t) = -\frac{1}{2}k_a \hat{m}(t)$$

$$\square x(t) = \frac{1}{2} \{ k_a m(t) \cos(2\pi f_p t) + k_a \hat{m}(t) \sin(2\pi f_p t) \}$$

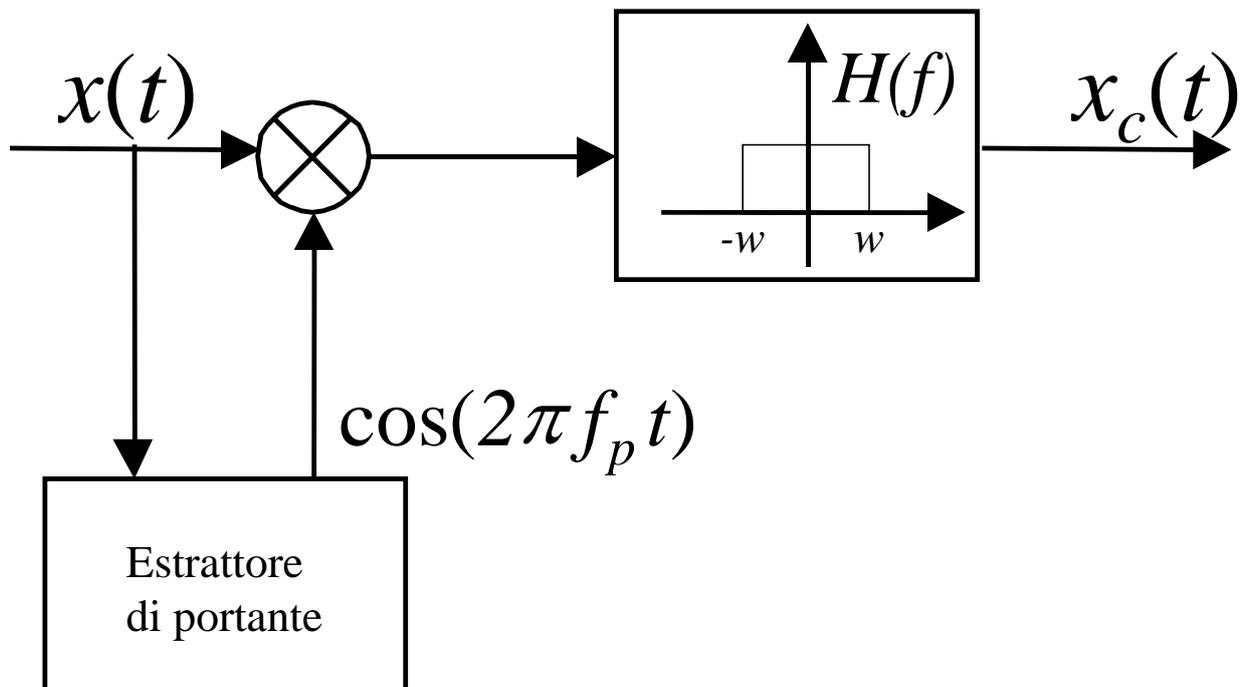
$$\square X(f) = \frac{1}{2} [k_a M^-(f - f_p) + k_a M^+(f + f_p)]$$



DEMODULAZIONE SINCRONA (O COERENTE, O OMODINA)

In tutti i casi considerati la demodulazione consiste nella *estrazione della componente analogica in fase $x_c(t)$* del segnale trasmesso $x(t)$.

- La frequenza e la fase della portante sono estratte dal circuito "estrattore di portante" in ricezione.

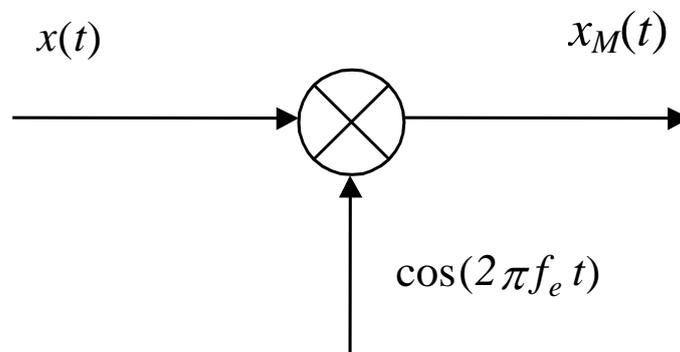


DEMODULAZIONE ETERODINA

○ **La Demodulazione eterodina è effettuata in due passi.**

□ Il primo stadio del demodulatore eterodina usa una portante di demodulazione a frequenza f_e diversa da quella di modulazione (*frequenza di eterodina*).

□ poichè $x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_p t) - x_s(t) \sin(2\pi f_p t)$



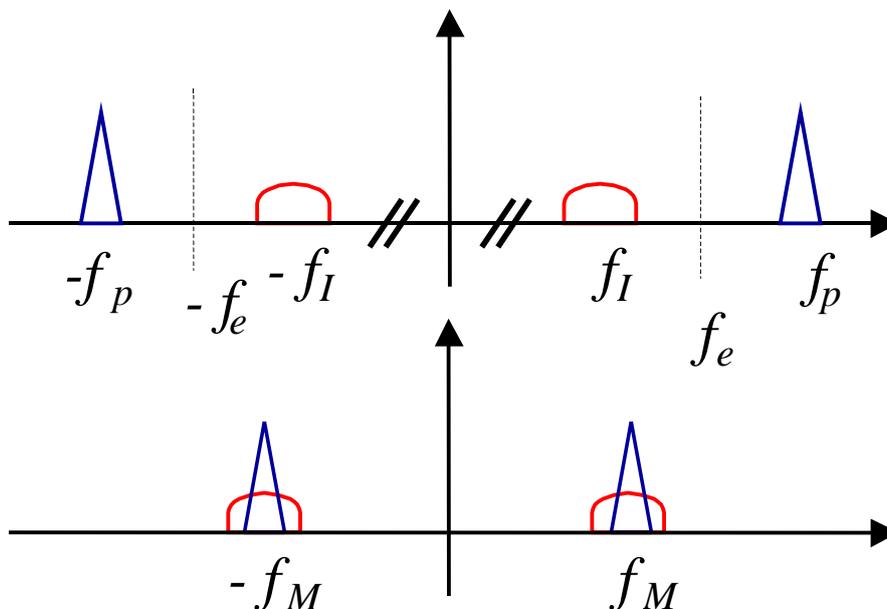
$$2x_M(t) = x_c(t) [\cos(2\pi(f_p - f_e)t) + \cos(2\pi(f_p + f_e)t)] \\ + x_s(t) [\sin(2\pi(f_p - f_e)t) - \sin(2\pi(f_p + f_e)t)]$$

□ Il segnale $x_M(t)$ risulta dalla sovrapposizione di due segnali modulati, uno a frequenza $f_p + f_e$, che è rimosso mediante un filtraggio passa-banda, e uno a frequenza $f_m = f_p - f_e$, detta *media frequenza*.

□ Il segnale $x_c(t)$ si ottiene tramite la successiva demodulazione del segnale modulato a *media frequenza*.

DEMODULAZIONE ETERODINA

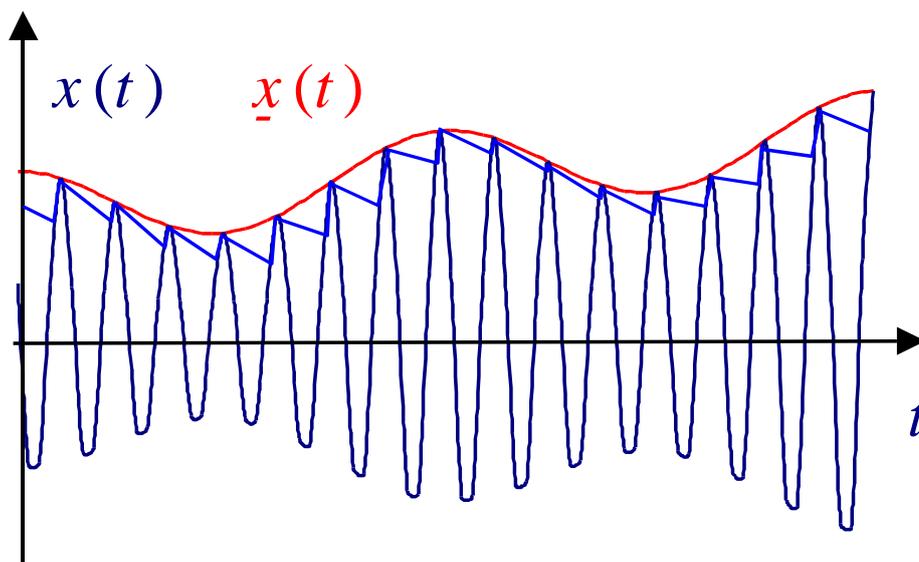
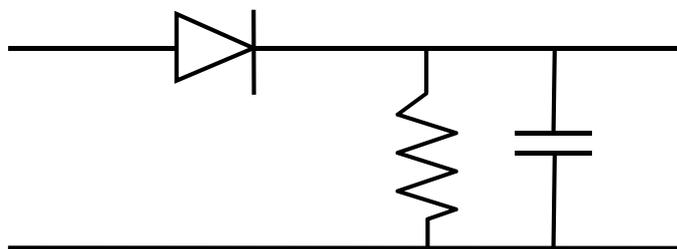
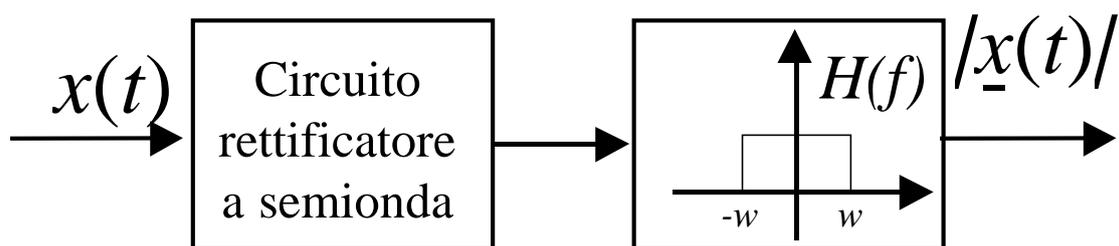
- ❑ Le operazioni di amplificazione, filtraggio, demodulazione sono effettuate a *media frequenza* (realizzazione circuitale più semplice).
- ❑ Al variare di f_e lo schema consente di *sintonizzare diverse frequenze portanti*, mantenendo fissata la media frequenza f_M (*ricevitore a supereterodina*).
- ❑ Se il segnale ricevuto è la somma del segnale desiderato $x(t)$ e di altri segnali allocati in diverse bande di frequenza, la moltiplicazione per $\cos(2\pi f_e t)$ riporta intorno alla frequenza f_M non solo il segnale modulato alla frequenza f_p , ma anche eventuali segnali modulati alla frequenza $f_I = f_e - f_M$, (*frequenza immagine*):



Detti segnali vanno perciò rimossi mediante filtraggio passabanda *prima* del mixer eterodina.

DEMODULATORE D'INVILUPPO (O INCOERENTE)

- Il ricevitore ad inviluppo estrae il modulo dell'involuppo complesso di $x(t)$.
- E' perciò utilizzato solo nel caso di trasmissione BLD-PI, in cui il modulo dell'involuppo complesso coincide con $x_c(t)$.



INVILUPPO COMPLESSO

□ Dato l'*inviluppo complesso* di un segnale *reale* $x(t)$,

$$\underline{x}(t) = x_c(t) + jx_s(t)$$

esso può essere riscritto nella forma

$$\underline{x}(t) = a(t)e^{j\alpha(t)}$$

essendo

○ $a(t)$: **ampiezza istantanea**

$$a(t) = |\underline{x}(t)| = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$$

○ $\alpha(t)$: **fase istantanea**

$$\alpha(t) = \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{x_s(t)}{x_c(t)} \right]$$

□ Per il segnale $x(t)$ si ha quindi la seguente rappresentazione

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ &= a(t) \cos[2\pi f_0 t + \alpha(t)] \end{aligned}$$

□ Si definiscono inoltre

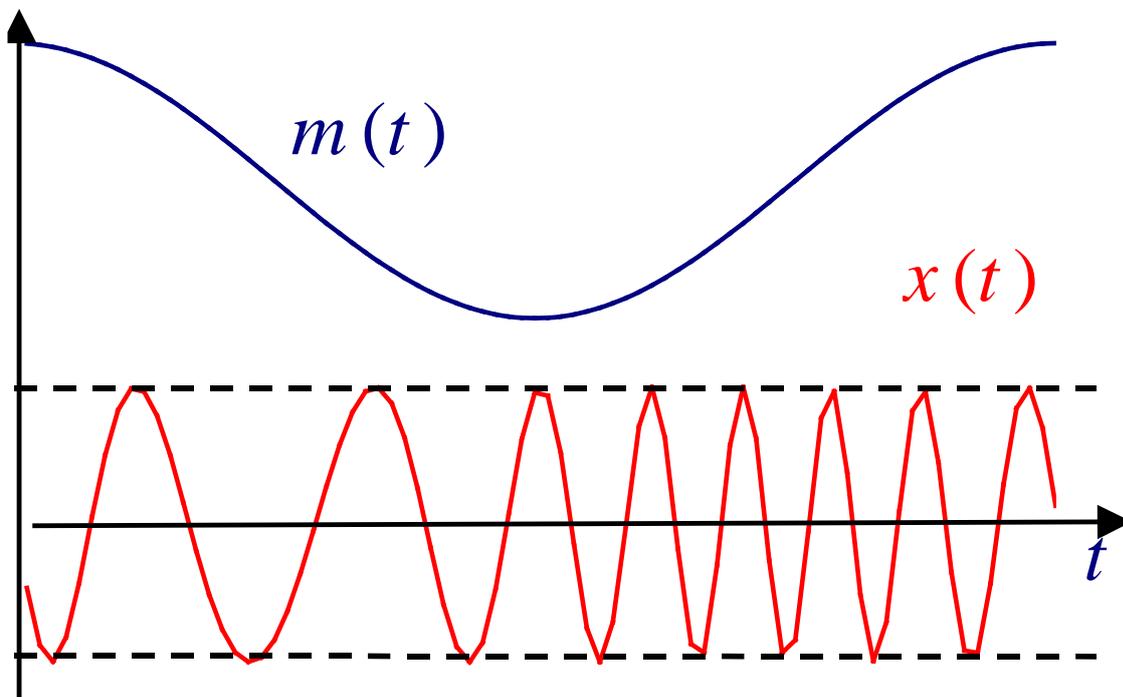
➤ **deviazione di frequenza:** $f_d(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\alpha(t)}{dt}$

➤ **frequenza istantanea:**

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [2\pi f_0 t + \alpha(t)] = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\alpha(t)}{dt} = f_0 + f_d(t)$$

MODULAZIONE ANGOLARE

- Le componenti analogiche di bassa frequenza sono scelte in modo tale che o la fase istantanea $\alpha(t)$, o la deviazione di frequenza $f_d(t)$ siano proporzionali al messaggio.



- MODULAZIONE DI FASE

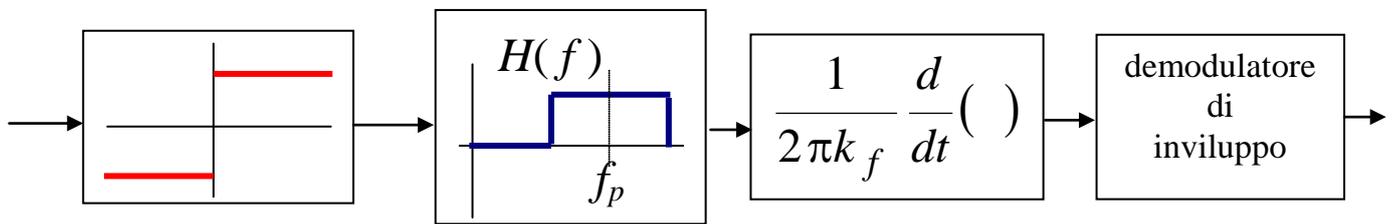
$$\alpha(t) = k_{\alpha} m(t)$$

- MODULAZIONE DI FREQUENZA

$$f_d(t) = k_f m(t)$$

$$\alpha(t) = 2\pi \int_0^t k_f m(t) dt$$

DEMODULATORE A DISCRIMINATORE



limitatore
ideale

- Il limitatore ideale ed successivo filtro passa banda centrato intorno ad f_p hanno il compito di eliminare ogni eventuale modulazione di ampiezza residua presente su $x(t)$. Ovvero se il segnale ricevuto vale

$$r(t) = a(t) \cos[2\pi f_p t + \alpha(t)], \quad (a(t) > 0)$$

allora l'uscita del filtro $z(t)$ vale

$$z(t) = \cos[2\pi f_p t + \alpha(t)]$$

- quindi l'uscita del derivatore è un segnale modulato in ampiezza di tipo BLD-PI:

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2\pi k_f} \frac{dz(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi k_f} \frac{d \cos[2\pi f_p t + \alpha(t)]}{dt} \\ &= - \frac{2\pi f_p + 2\pi f_d(t)}{2\pi k_f} \sin[2\pi f_p t + \alpha(t)] \\ &= - \left[\frac{f_p}{k_f} + m(t) \right] \sin[2\pi f_p t + \alpha(t)] \end{aligned}$$

DEMODULATORE A DISCRIMINATORE

□ l'uscita del limitatore ideale vale

$$\begin{aligned}y(t) &= \text{sign}\{r(t)\} = \text{sign}\{a(t) \cos[2\pi f_p t + \alpha(t)]\} \\ &= \text{sign}\{\alpha(t)\} \text{sign}\{\cos[2\pi f_p t + \alpha(t)]\} = \\ &= \text{sign}\{\cos[2\pi f_p t + \alpha(t)]\}\end{aligned}$$

essa è quindi del tipo

$$\begin{aligned}g(\varphi) &= \text{sign}\{\cos[\varphi]\} \\ &= -1 + \sum_k 2 \text{rect}_\pi(\varphi - k2\pi)\end{aligned}$$

□ $g(\varphi)$ risulta periodica di periodo 2π e quindi sviluppabile in serie di Fourier:

$$g(\varphi) = \sum_n G_n e^{jn\varphi}$$

con

$$G_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ Ca \left[\frac{\pi n}{2} \right] & n \neq 0 \end{cases}$$

□ quindi

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2Ca \left[\frac{\pi n}{2} \right] \cos[2\pi n f_p t + n\alpha(t)]$$

MODULAZIONE DI FREQUENZA

□ sia $m(t) = \cos(2\pi\omega t + \varphi)$

□ quindi nel caso della modulazione di frequenza si ha

$$1. f_d(t) = k_f \cos(2\pi\omega t + \varphi)$$

$$2. a(t) = 2\pi k_f \int_0^t \cos(2\pi\omega t + \varphi) dt$$

$$= \frac{k_f}{\omega} \int_0^t d \sin(2\pi\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{k_f}{\omega} \sin(2\pi\omega t + \varphi)$$

$$3. x(t) = \cos \left[2\pi f_p t + \frac{k_f}{\omega} \sin(2\pi\omega t + \varphi) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ e^{j \left[2\pi f_p t + \frac{k_f}{\omega} \sin(2\pi\omega t + \varphi) \right]} + e^{-j \left[2\pi f_p t + \frac{k_f}{\omega} \sin(2\pi\omega t + \varphi) \right]} \right\}$$

Per il calcolo di $X(f)$ si osservi che il segnale

$$s(t) = e^{j \frac{k_f}{\omega} \sin(2\pi\omega t + \varphi)}$$

è del tipo

$$f(\theta) = e^{jb \sin(\theta)}$$

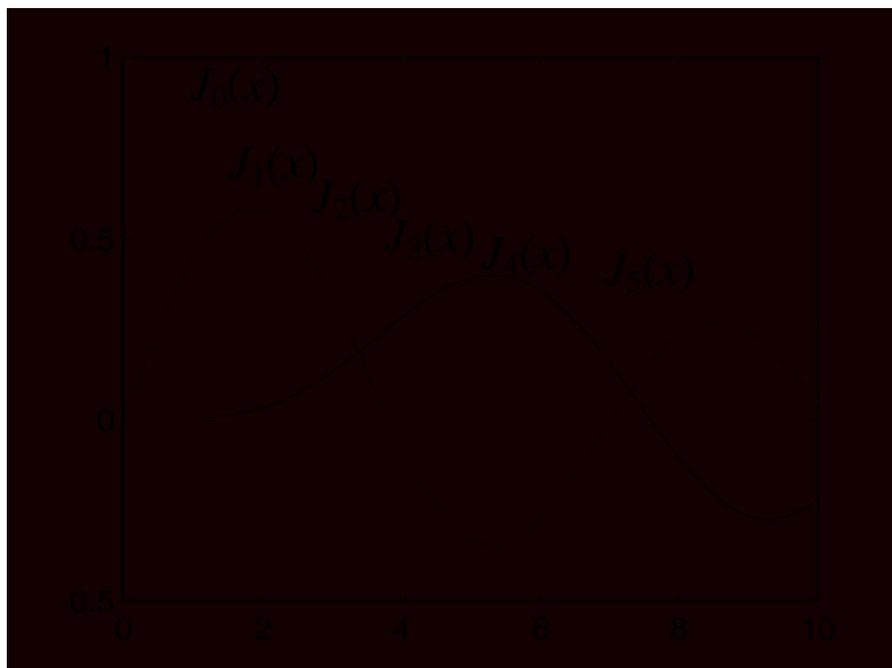
MODULAZIONE DI FREQUENZA

Poiché $f(\theta) = e^{jb \sin(\theta)}$ è periodica con periodo 2π essa può essere sviluppata in serie di Fourier come segue:

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\theta}$$

essendo

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j[b \sin(\theta) - n\theta]} d\theta = J_n(b)$$



quindi

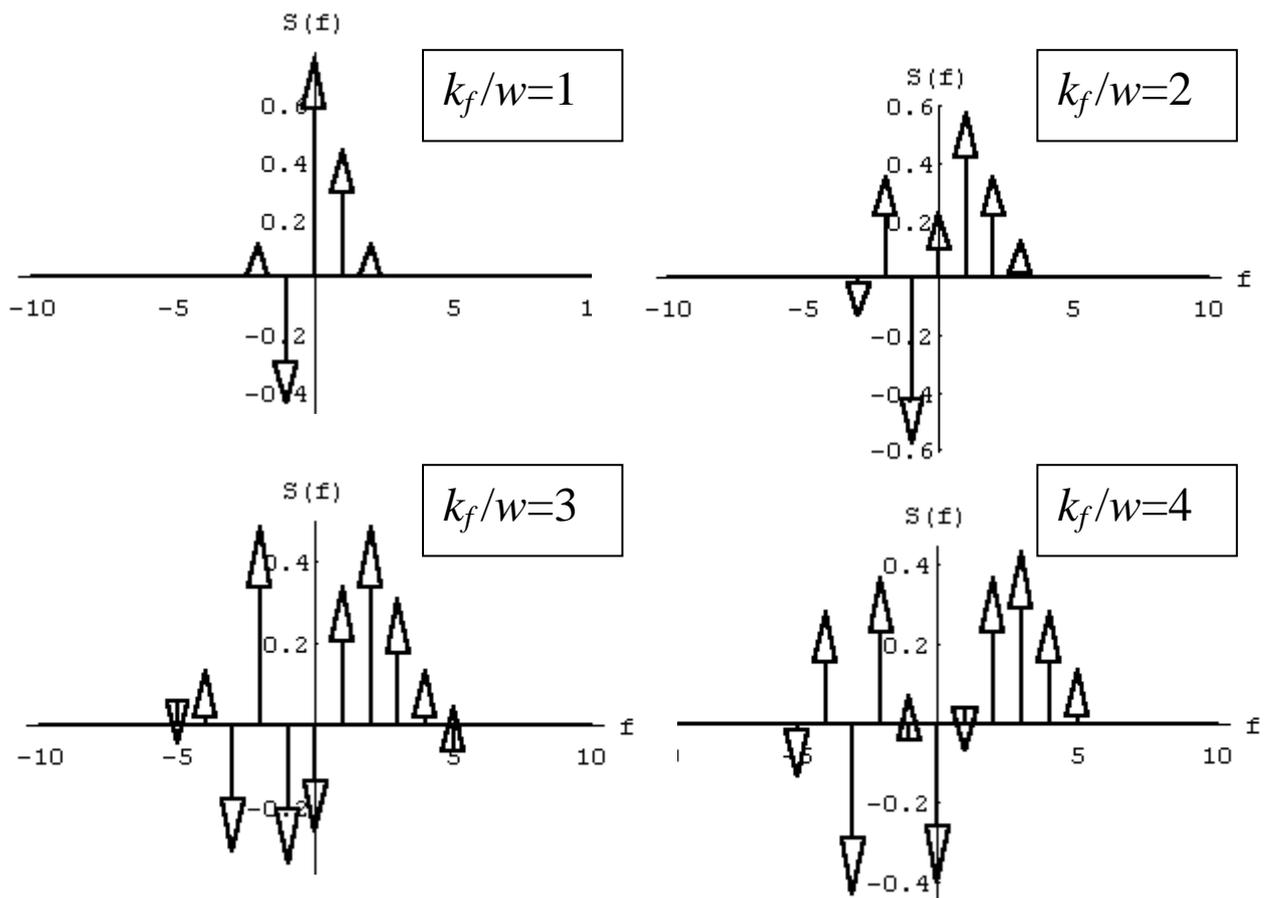
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{k f}{w}\right) e^{j[2\pi n w t + \varphi]}$$

MODULAZIONE DI FREQUENZA

$$X(f) = S(f - f_p) + S^*(-f - f_p)$$

con

$$S(f - f_p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n\left(\frac{k_f}{w}\right) e^{j[n\phi]} u_o(f - f_p - nw)$$



□ si osservi che $J_n(x) \cong 0$ per $n > x + 1$

□ quindi l'occupazione complessiva in banda è

$$B = 2n_{\max} w = 2(k_f + w) \quad \text{(BANDA DI CARSON)}$$

MODULAZIONE DI FREQUENZA

- L'involuppo del segnale AM varia nel tempo con il messaggio modulante, mentre l'involuppo del segnale FM è *costante*. Ciò offre una maggiore resistenza ai disturbi e alle variazioni dell'attenuazione introdotta dal mezzo trasmissivo.
- La banda occupata da segnali modulati AM con modulante sinusoidale di frequenza f_1 è $2f_1$, la banda occupata dai segnali FM è infinita.
- La componente di frequenza f_p del segnale AM ha ampiezza costante al variare di k_a , mentre l'ampiezza della componente di frequenza f_p del segnale FM varia al variare di k_f come la funzione di Bessel di ordine zero $J_0(z)$
- Il segnale AM ha bande laterali che obbediscono al principio di sovrapposizione degli effetti rispetto al messaggio modulante, mentre le bande laterali del segnale FM non rispettano tale condizione.
- I circuiti di demodulazione FM sono più complessi dei circuiti in uso per la demodulazione AM.

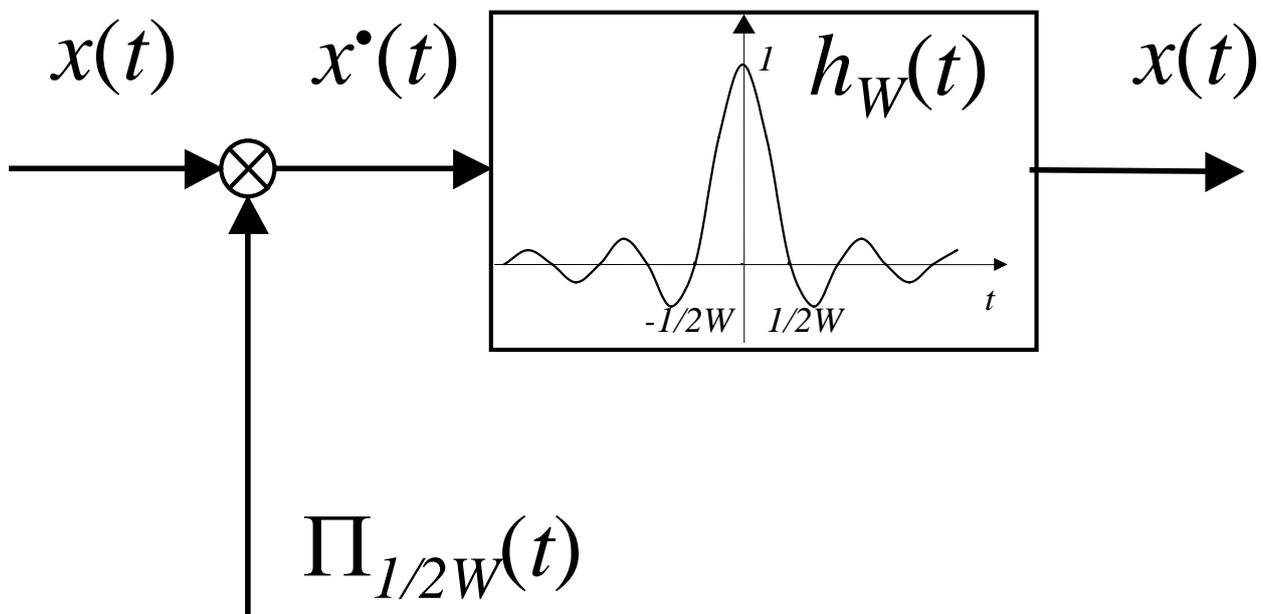
TEOREMA DI SHANNON: ENUNCIATO

➤ *Def.* Un segnale $x(t)$ si dice *limitato nella banda* $[-W, W]$ se non è alterato dal transito attraverso un filtro con funzione di trasferimento pari a 1 per $f \in [-W, W]$ e zero altrove.

➤ *Teorema di Shannon* Un segnale $x(t)$ limitato in banda $[-W, W]$ ammette la seguente rappresentazione:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2W}\right) \text{Ca}\left[\pi 2W\left(t - \frac{n}{2W}\right)\right]$$

ovvero



TEOREMA DI SHANNON: DIMOSTRAZIONE

- Sia $X^\bullet(f)$ la funzione periodica che ammette $X(f)$ come funzione generatrice.
- $X^\bullet(f)$ ammette il seguente sviluppo in serie di Fourier:

$$X^\bullet(f) = \sum_n \xi_n e^{j2\pi \frac{n}{2W} f}$$
$$\xi_n = \frac{1}{2W} F^{-1}\{X(f)\} \Big|_{t=-n \times \frac{1}{2W}} = \frac{1}{2W} x\left(-\frac{n}{2W}\right)$$

- Moltiplicando ambedue i membri dello sviluppo per $rect_{2W}(f)$

$$X^\bullet(f) \cdot rect_{2W}(f) = X(f) = \left(\frac{1}{2W} \sum_n x\left(\frac{n}{2W}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{2W} f} \right) \cdot rect_{2W}(f)$$

e antitrasformando

$$x(t) = \left(\frac{1}{2W} \sum_n x\left(\frac{n}{2W}\right) u_0\left(t - \frac{n}{2W}\right) \right) * 2W Ca(\pi 2W t)$$

segue la tesi

$$x(t) = \sum_n x\left(\frac{n}{2W}\right) Ca\left(\pi 2W \left(t - \frac{n}{2W}\right)\right)$$
$$= \sum_n x(nT_c) Ca(\pi 2W(t - nT_c))$$

cdd.

TEOREMA DI SHANNON

➤ *Commento:* Il teorema afferma che un *segnale* $x(t)$ *limitato in banda* è ricostruibile a partire da un'*infinità numerabile* di campioni, estratti con una frequenza di campionamento *sufficientemente grande*.

➤ *Commento:* La famiglia delle funzioni di campionamento

$$\left\{ Ca \left[\pi 2W \left(t - \frac{n}{2W} \right) \right] \right\}.$$

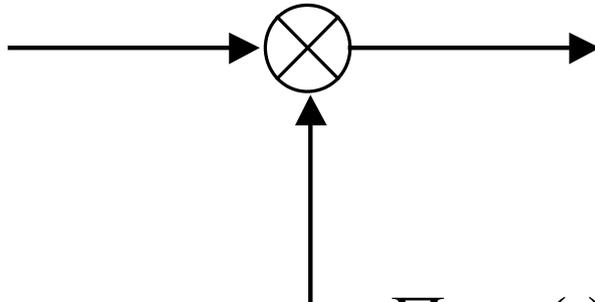
costituisce una base ortogonale dei segnali limitati in banda.

Prova:

$$\begin{aligned} & \left\langle Ca \left[\pi 2W \left(t - \frac{n}{2W} \right) \right], Ca \left[\pi 2W \left(t - \frac{m}{2W} \right) \right] \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2W} \text{rect}_{2W}(f) e^{-j2\pi \frac{n}{2W} f}, \frac{1}{2W} \text{rect}_{2W}(f) e^{-j2\pi \frac{m}{2W} f} \right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{2W} \right)^2 \int_{-W}^{+W} e^{-j2\pi \frac{1}{2W} (n-m) f} df = \begin{cases} 1/(2W) & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

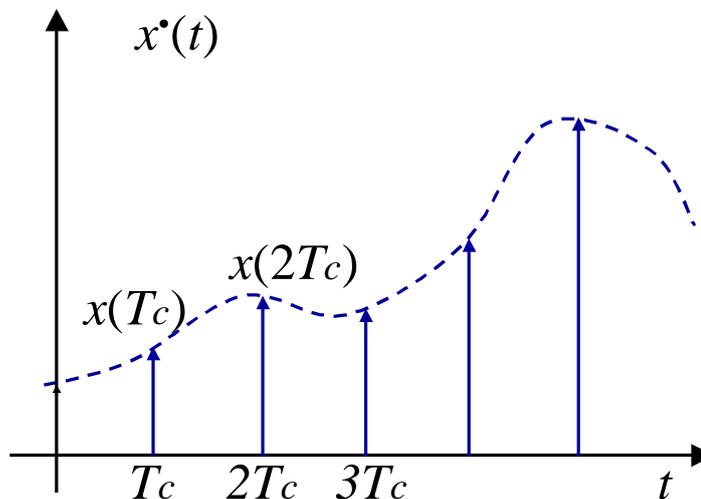
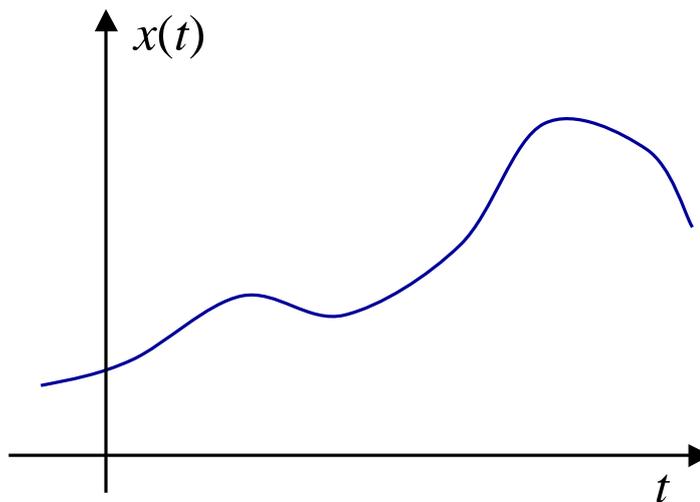
TEOREMA DI SHANNON: CAMPIONAMENTO

$$x(t) \quad x^*(t) = \sum_n x(n/2W) u_0(t-n/2W)$$



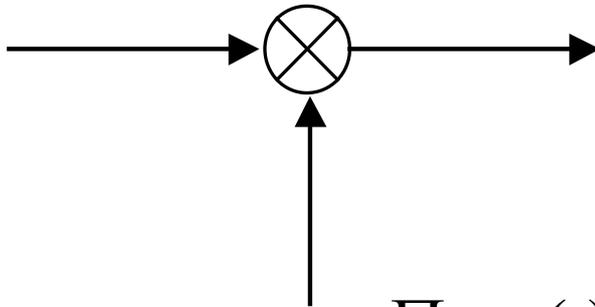
$$\Pi_{1/2W}(t) = \sum_n u_0(t-n/2W)$$

➤ **Dominio del Tempo:**



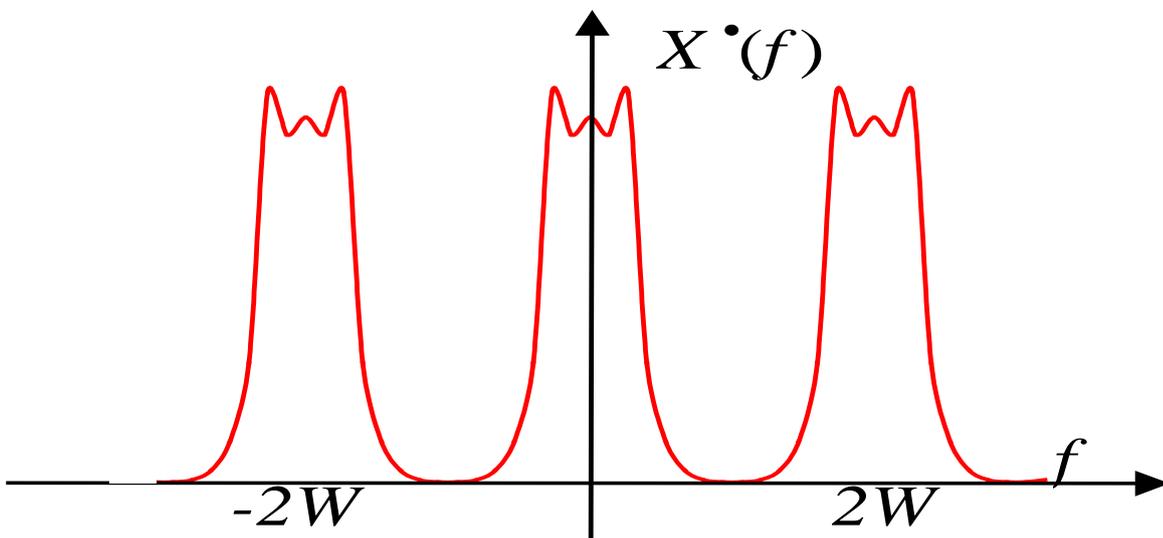
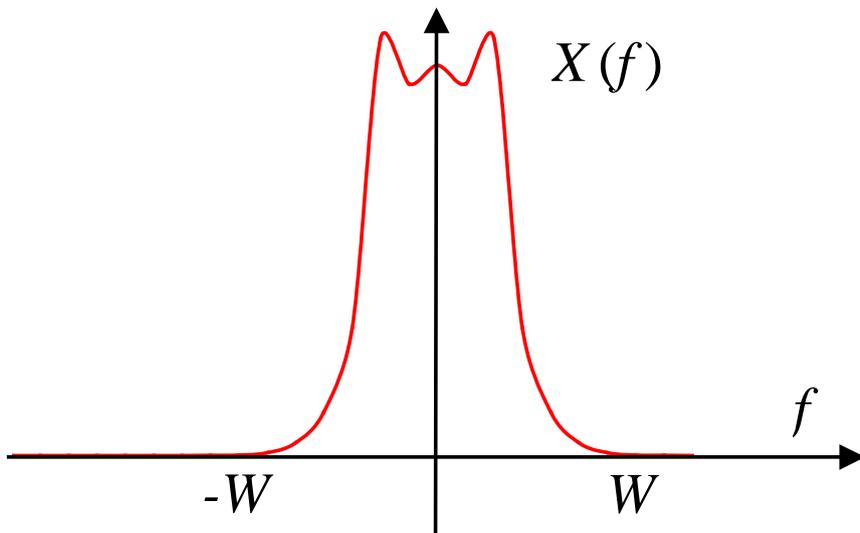
TEOREMA DI SHANNON: CAMPIONAMENTO

$$x(t) \quad x^*(t) = \sum_n x(n/2W) u_0(t-n/2W)$$



$$\Pi_{1/2W}(t) = \sum_n u_0(t-n/2W)$$

➤ **Dominio della Frequenza:**



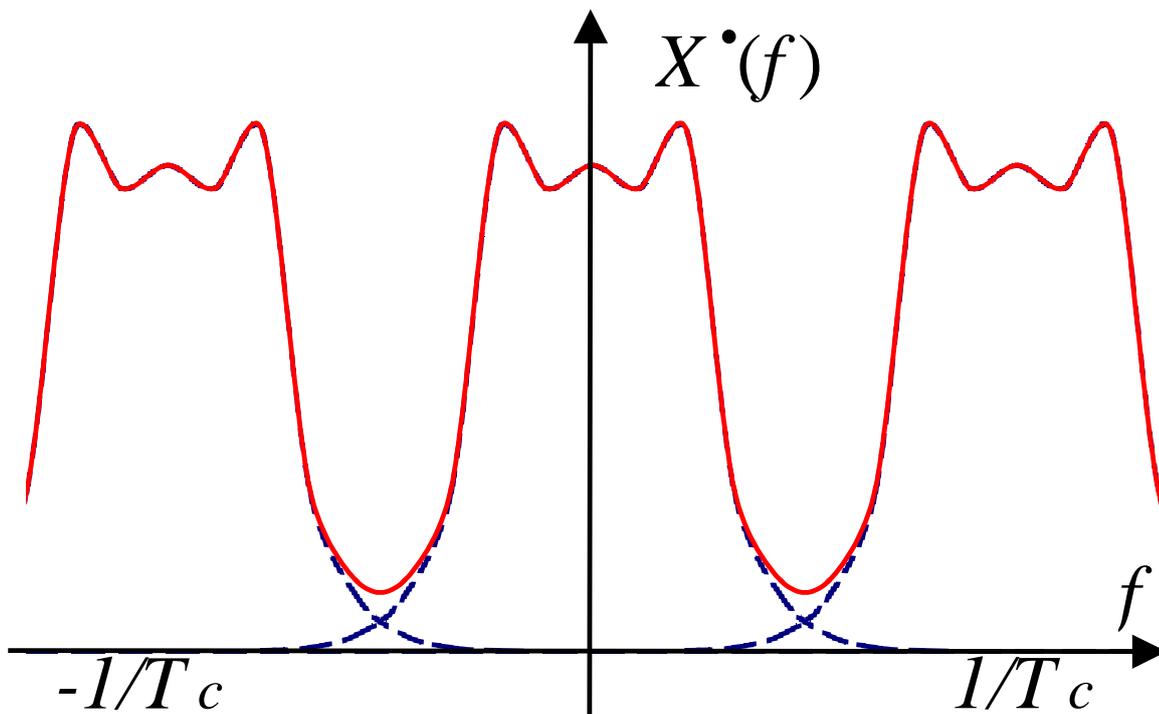
TEOREMA DI SHANNON: SOTTOCAMPIONAMENTO

➤ *Commento:* Il teorema indica la frequenza di campionamento minima

$$f_{c\min} = \frac{1}{T_{c\max}} = 2W$$

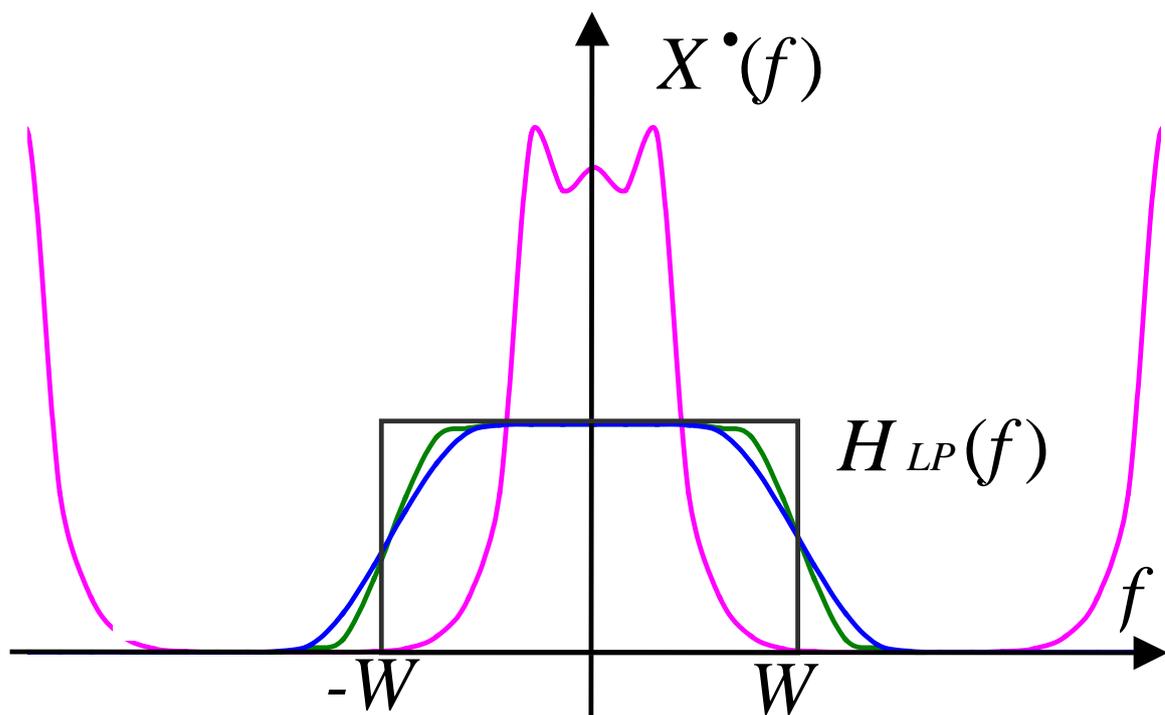
affinchè un *segnale* $x(t)$ limitato in banda sia ricostruibile a partire dai suoi campioni.

➤ Se la frequenza di campionamento utilizzata è $f_c < 2W$ (*sottocampionamento*), le repliche dello spettro $X(f)$ risultano sovrapposte (fenomeno di *aliasing*), e il segnale originario non è ricostruibile a partire dai suoi campioni.



TEOREMA DI SHANNON: SOVRACAMPIONAMENTO

- Se la frequenza di campionamento utilizzata è $f_c > 2W$ (sovracampionamento), le repliche dello spettro $X(f)$ risultano distanziate in frequenza.
- Il segnale originario è ricostruibile a partire da $X^*(f)$ mediante il transito in filtri passabasso non ideali.
- Il progetto di filtri caratterizzati da funzioni di trasferimento smussate risulta più semplice, e la loro realizzazione meno costosa, rispetto a filtri con brusche transizioni della funzione di trasferimento.

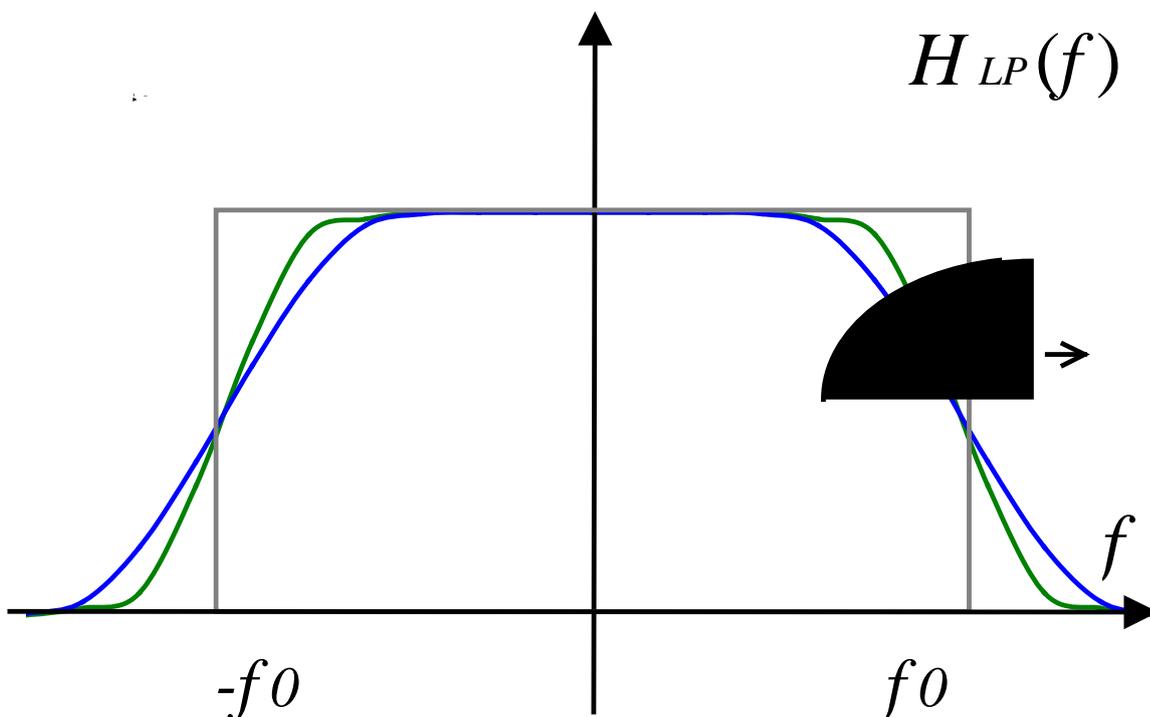


TEOREMA DI SHANNON: SOVRACAMPIONAMENTO

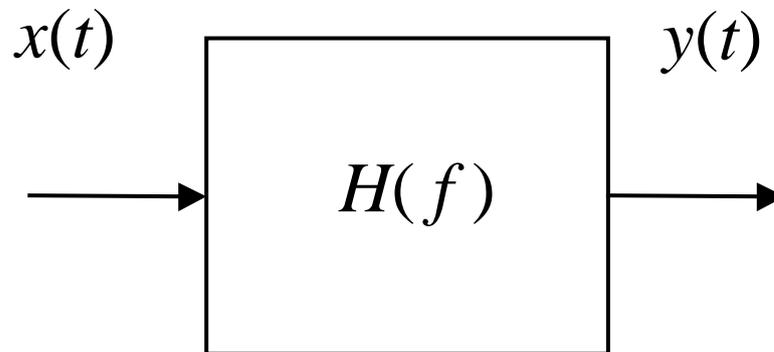
➤ Una famiglia di filtri di uso comune nella conversione digitale analogico è quella dei *filtri a coseno rialzato*, definita come

$$H_{LP}(f) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |f| \leq (1-\gamma)f_0 \\ 1 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \frac{f - f_0}{\gamma f_0}\right) & (1-\gamma)f_0 \leq |f| \leq (1+\gamma)f_0 \\ 0 & (1+\gamma)f_0 \leq |f| \end{cases}$$

dove il parametro γ è detto *roll-off* del filtro.



TEOREMA DI SHANNON: TRANSITO IN UN FILTRO



➤ Sia $x(t)$ un segnale limitato in banda che transita in un filtro $h(t)$.

Allora:

- il segnale di uscita $y(t)=x(t)*h(t)$ è limitato in banda
- i campioni di $y(t)$ sono legati a quelli di $x(t)$ da:

$$y\left(\frac{n}{2W}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{2W}\right) \cdot h_{2W}\left(\frac{n-k}{2W}\right)$$

dove $h_{2W}(t)=h(t)*Ca[\pi 2Wt]$, ovvero $H_{2W}(f)=H(f)$ per $f \in [-W, W]$ e zero altrove. La sommatoria prende il nome di *prodotto di convoluzione*.

➤ *Commento*: La relazione fra i campioni dell'ingresso e dell'uscita di un filtro lineare fornisce un criterio per il progetto di *filtri numerici*, ovvero filtri che operando unicamente *sui campioni* della forma d'onda d'ingresso, calcolino *i campioni* della forma d'onda d'uscita corrispondente al filtro desiderato.

TEOREMA DI SHANNON: TRANSITO IN UN FILTRO

Prova: Per ipotesi $x(t)=x(t)*h_{LP}(t)$, dove $H_{LP}(f)$ è pari a 1 per $f \in [-W, W]$ e zero altrove. Allora il segnale $y(t)$ è limitato in banda poichè $y(t)*h_{LP}(t)=x(t)*h(t)*h_{LP}(t)=x(t)*h_{LP}(t)*h(t)=x(t)*h(t)=y(t)$.

Inoltre

$$\begin{aligned}
 y\left(\frac{n}{2W}\right) &= x(t)*h(t)\Big|_{t=\frac{n}{2W}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi)h\left(\frac{n}{2W}-\xi\right)d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{2W}\right)Ca\left[\pi 2W\left(\xi-\frac{k}{2W}\right)\right]h\left(\frac{n}{2W}-\xi\right)d\xi \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{2W}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} Ca\left[\pi 2W\left(\xi-\frac{k}{2W}\right)\right]h\left(\frac{n}{2W}-\xi\right)d\xi \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{2W}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} Ca[\pi 2W(\tau)]h\left(\frac{n-k}{2W}-\tau\right)d\tau \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{2W}\right) (h(\tau)*Ca[\pi 2W(\tau)])\Big|_{\tau=\frac{n-k}{2W}} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{k}{2W}\right) h_{2W}\left(\frac{n-k}{2W}\right)
 \end{aligned}$$

c.d.d.

TEOREMA DI SHANNON: APPLICAZIONI

➤ Il teorema di Shannon trova applicazione in tutte le aree in cui si richieda la **rappresentazione di un segnale analogico in formato digitale e viceversa** ai fini di:

➤ *Trasmissione di un segnale analogico su rete numerica*

Segnale in banda vocale su canale telefonico fisso a 64 Kb/s o su canale radiomobile a 9.6 Kb/s

➤ *Interfaccia analogica di un sistema di elaborazione numerico*

Controllo di Processi Industriali

Telerilevamento (Sistemi Ecografici, Sonar, Radar)

Cancellazione d'eco, restauro digitale di segnale audio o video

Elaborazione del segnale vocale

PDA Voice Over Data

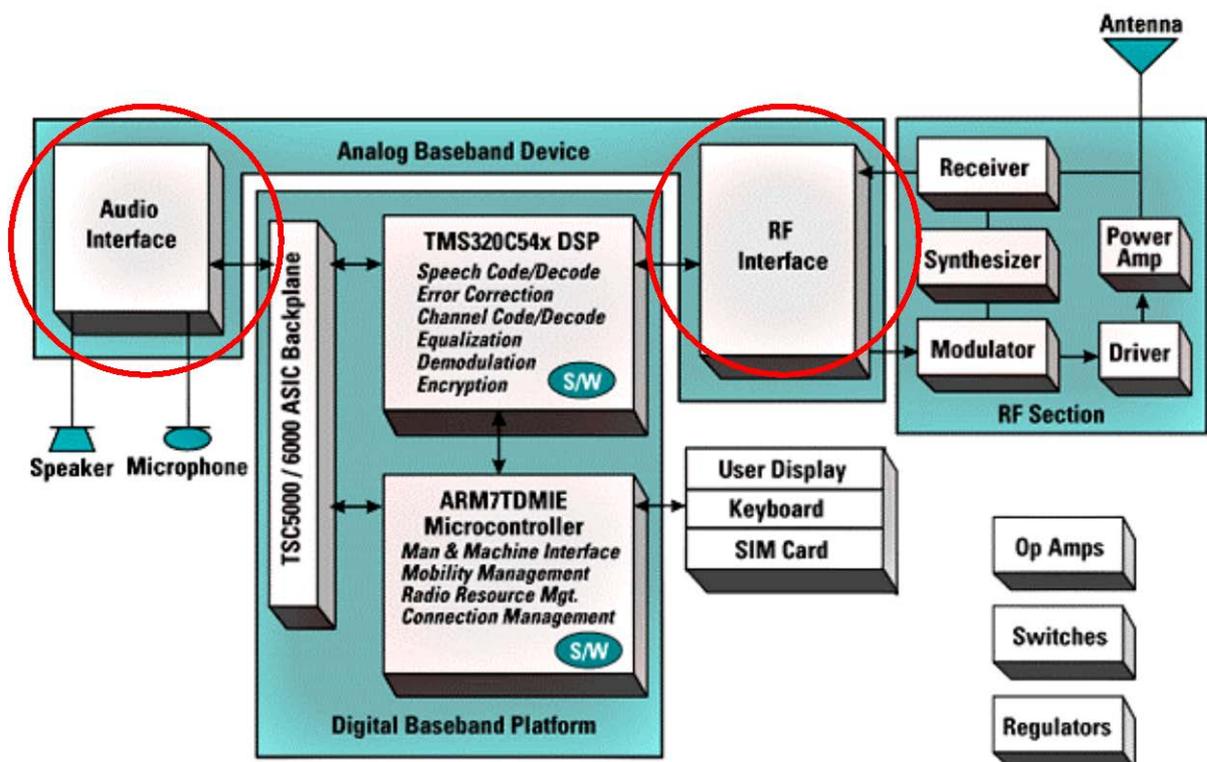
➤ *Memorizzazione*

Segnale musicale per riproduzione ad alta qualità (CD Audio)

TEOREMA DI SHANNON: APPLICAZIONI

- Trasmissione di un **segnale in banda vocale su canale radiomobile** a 13.5 Kb/s:

Schema di Apparato Radiomobile (*Handset*):



Percorso dei dati (*Data Path*):

Audio Interface: riceve l'ingresso analogico dal microfono, *filtra* via le frequenze non vocali, *campiona* e *quantizza* il segnale, e inoltra i campioni ottenuti al DSP, ovvero riceve i campioni dal DSP, li *converte* in forme d'onda analogiche e li *filtra* passabasso, li inoltra allo speaker.

TEOREMA DI SHANNON: APPLICAZIONI

➤ **Trasmissione di un segnale in banda vocale su canale radiomobile a 13.5 Kb/s (segue)**

Digital Signal Processor DSP: *elaborazione del segnale vocale digitalizzato, protezione dagli errori di trasmissione, recupero delle distorsioni* introdotte dal canale sui segnali ricevuti.

Radiofrequency Interface: legge il segnale in banda-base all'uscita del sottosistema a radio frequenza *filtrandolo passabasso e campionandolo* per la successiva elaborazione da parte del DSP. Inoltre converte la stringa dati digitale in uscita dal DSP nella forma d'onda di banda base richiesta dallo standard di trasmissione (GSM in Europa, AMPS in USA).

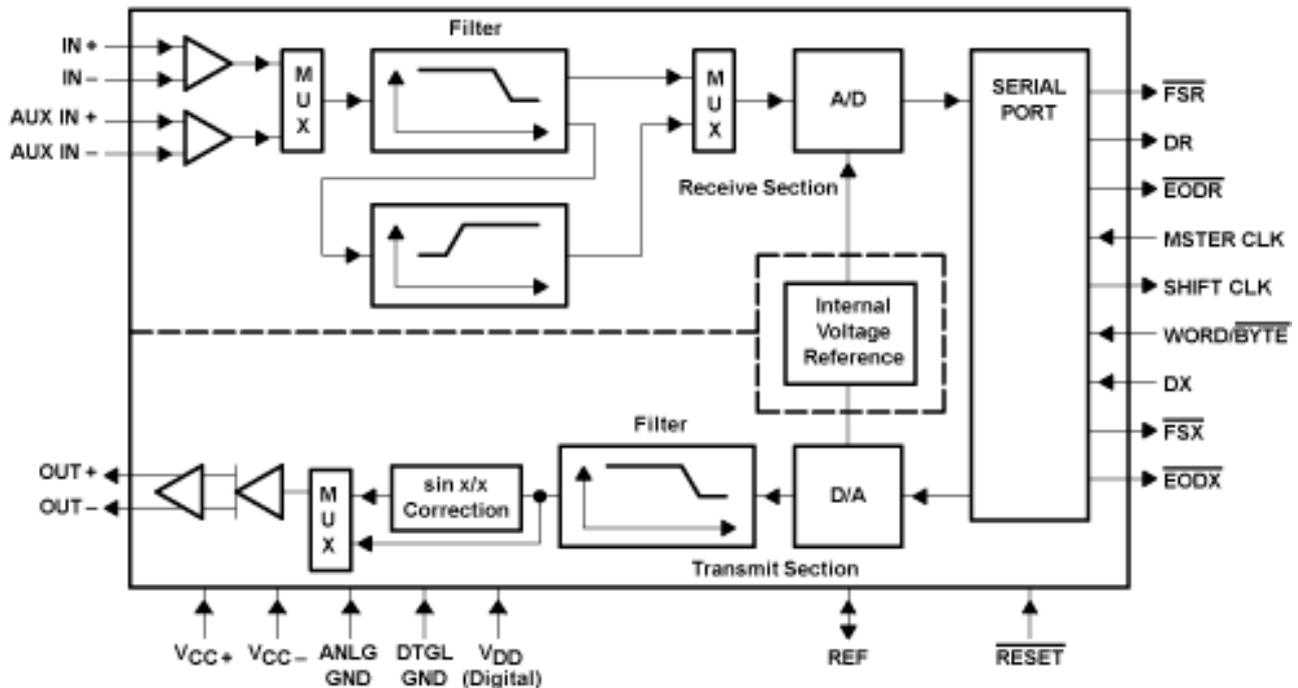
Sottosistema a Radiofrequenza: *trasla dalla banda base alla frequenza portante* (dalla frequenza portante alla banda base) il segnale analogico ricevuto da (diretto verso) l'interfaccia RF (moltiplicazione per la cosinusoide generata dall'oscillatore locale).

TEOREMA DI SHANNON: APPLICAZIONI

➤ Sistema di interfaccia analogico digitale

(Analog Interface Circuit)

functional block diagram



- Un circuito di interfaccia analogico (AIC) consiste di uno o più percorsi di dati (*data paths*) e uno o più interfacce di ingresso uscita I/Os con appropriata circuiteria.
- Il percorso analogico/digitale *filtra, campiona e quantizza* il segnale e lo inoltra alla porta di I/O seriale.
- Il percorso digitale/analogico riceve i dati elaborati dalla porta seriale del DSP, li *converte in forma analogica, attenua il rumore di conversione* ad alta frequenza, e presenta il segnale analogico alle uscite analogiche.

TEOREMA DI SHANNON: APPLICAZIONI

➤ **Sistema di interfaccia analogico digitale (segue)**

➤ Caratteristiche tecniche di sistemi di interfaccia analogico digitale in commercio (<http://www.ti.com>)

Device	Bits/ Sample	Bandwidth (kHz)	Sample Rate (kHz)	S/D min (dB) ADC/ DAC	Power Supply (Volts)	Power Dissip max (mW)
TLC32 040	14	0.3-3.6	19.2	58/58	±5	430
TLC32 041	14	0.3-3.6	19.2	58/58	±5	430
TLC32 044	14	0.1-3.8	19.2	58/58	±5	430
TLC32 045	14	0.1-3.8	19.2	55/55	±5	430
TLC32 046	14	0.3-7.2	25	58/58	±5	430
TLC32 047	14	0.3-11.4	25	56/58	±5	430
TLC32 0AC01	14	0-10.8	25	66/68	+5	110
TLC32 0AC02	14	0-10.8	25	68/68	+5	110

TEORIA DELLA PROBABILITÀ

Studio dei fenomeni aleatori, ovvero fenomeni che presentano elementi di incertezza a priori.

➤ L'*aleatorietà* di un fenomeno è legata alla conoscenza che l'osservatore ha riguardo al fenomeno stesso.

Esempi di fenomeni aleatori di interesse nelle telecomunicazioni e nell'elaborazione del segnale

- Numero e tipo di chiamate presentate alla centrale di commutazione,
- Errori introdotti dal canale di comunicazione sul messaggio trasmesso,
- Attenuazione del segnale trasmesso lungo un cammino radio in caso di perturbazione atmosferica,
- Echi radar, sonar, acustici nei sistemi di telerilevamento attivi o passivi,
- Assetto satellitare
- Errori di misura negli strumenti di acquisizione
- Guasti di un sistema
-

TEORIA DELLA PROBABILITÀ

Impostazione dello studio di fenomeni aleatori:

- *Osservazione Sperimentale:* Nell'osservazione di fenomeni di massa come quelli citati, all'aumentare del numero delle osservazioni alcuni valori medi “tendono” a valori costanti.
- *Obiettivo:* Predire tali valori medi in termini di **Probabilità di eventi**

Si distinguono diversi approcci, che muovono da differenti *Definizioni di Probabilità:*

- *Approccio Classico:* Si definisce probabilità $P(A)$ di un evento A il rapporto:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

dove N_A è il numero di risultati favorevoli all'evento A e N è il numero totale dei risultati possibili, a patto che essi siano equiprobabili.

TEORIA DELLA PROBABILITÀ

➤ *Approccio Frequentistico*: Si definisce probabilità $P(A)$ di un evento A il rapporto fra il numero n_A di occorrenze dell'evento e il numero totale n degli esperimenti:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n_A}{n} \right\}$$

➤ *Approccio Assiomatico* (Kolmogoroff, 1933):

- ◆ descrizione degli eventi aleatori in termini di *insiemi*
- ◆ definizione della loro probabilità mediante un numero ristretto di *assiomi*

La teoria assiomatica della probabilità è ricondotta alla **teoria della misura** secondo Lebesgue su insiemi di punti di uno spazio astratto.

- ◆ Il legame fra il concetto di probabilità secondo l'approccio assiomatico e il concetto di probabilità nell'approccio frequentistico è stabilito, all'interno della teoria assiomatica, da alcuni *Teoremi* (*Legge dei grandi numeri*).
- La Legge dei grandi numeri suggerisce un *criterio di assegnazione di misura di probabilità* a fenomeni fisici con caratteristiche di aleatorietà.

DEFINIZIONI

Esperimento	Descrizione delle modalità di attuazione di un fenomeno aleatorio
Prova	Attuazione di un esperimento
Determinazione	Valore che può essere assunto da una grandezza fisica o attributo qualitativo a seguito di una prova
Risultato	N-upla ordinata delle determinazioni assunte dalle grandezze fisiche o degli attributi qualitativi descriventi il fenomeno a seguito di una prova
Serie Completa	Insieme di tutti i possibili diversi risultati
Risultati incompatibili	R. tali che il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro
Evento	Attributo logico di un risultato (l'evento si verifica se il risultato soddisfa l'attributo)

DEFINIZIONI (SEGUE)

Risultati favorevoli ad un evento	Insieme dei risultati per cui l'evento si verifica
Eventi Semplici	E. cui è favorevole un solo risultato
Eventi Composti	E. cui sono favorevoli più risultati
Eventi Compatibili	E. che hanno in comune almeno un risultato
Eventi Incompatibili	E. che non hanno in comune nessun risultato
Evento Certo	E. cui sono favorevoli tutti i risultati, ovvero che si verifica sempre
Evento Impossibile	E. cui non è favorevole alcun risultato, ovvero che non si verifica mai

TEORIA ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

- Ad ognuno dei *risultati* si associa con una corrispondenza biunivoca un *punto di uno spazio astratto* Ω . Lo spazio Ω prende il nome di spazio base, o spazio dei risultati.
- Dato un *evento* E ad esso corrisponde *l'insieme E dei punti di Ω* corrispondenti ai risultati *favorevoli* all'evento E . All'evento certo, cui sono favorevoli tutti i risultati possibili, corrisponde l'insieme Ω .
- Relazione fra le operazioni elementari sugli insiemi di Ω e le operazioni elementari che consentono di definire eventi a partire da altri eventi:

Operazione d'Insieme	Operazione sugli eventi
<p style="text-align: center;">Complementazione:</p> $\bar{A} = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \omega \notin A\}$	Evento "non-A", che si verifica quando non si verifica A
<p style="text-align: center;">Unione</p> $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \omega \in A \text{ "o" } \omega \in B\}$	Evento "A o B", che si verifica quando si verifica almeno uno dei due eventi A o B.
<p style="text-align: center;">Intersezione</p> $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in \Omega, \omega \in A \text{ "e" } \omega \in B\}$	Evento "A e B", che si verifica quando si verificano ambedue gli eventi A o B.

TEORIA ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

- Dato uno spazio base Ω costituito da un *numero finito* di punti, ed indicata con F la classe dei sottoinsiemi costituiti dai punti di Ω , si ha che essa è rappresentativa di tutti i possibili eventi.
- La **probabilità** P può essere definita come una **funzione d'insieme** avente come dominio la classe F . Alla funzione di probabilità si richiede
 - che possa essere messa in relazione con la frequenza relativa di un evento, che abbia cioè codominio in $[0,1]$
 - che la probabilità dell'evento certo sia uguale a 1
 - che risultino fissate le modalità con cui si calcolano le probabilità di eventi a partire dalla probabilità di eventi semplici, ad esempio che la probabilità sia additiva su eventi incompatibili.
- Nel caso che Ω sia costituito da un *numero infinito* di punti, risultati della teoria della misura dimostrano che non è possibile definire una funzione reale con le proprietà sopra esposte sulla classe di tutti i sottoinsiemi possibili di Ω . Si ricorre perciò al concetto di **σ -algebra**.

TEORIA ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

Definizione di σ -algebra

Sia F una classe su cui siano definite le tre operazioni di *complementazione, unione, e intersezione*. Sia inoltre:

- 1) $\Omega \in F$
- 2) se $A \in F$, $\bar{A} \in F$
- 3) se $A, B \in F$, $A \cup B \in F$
- 4) se $A, B \in F$, $A \cap B \in F$
- 5) se $A_n \in F$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

Allora F costituisce una **σ -algebra**.

Definizione di probabilità

$$P: F \rightarrow [0, 1]$$

Su una σ -algebra F , è possibile definire una funzione di insieme, reale, non-negativa, completamente additiva, che goda delle seguenti proprietà (**assiomi**):

- 1) $P(E) \geq 0 \quad \forall E \in F$
- 2) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \quad \forall E_1, E_2 \in F, E_1 \cap E_2 = \emptyset$
- 3) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \quad \forall E_1, \dots, E_n \dots \in F, E_i \cap E_j = \emptyset$
- 4) $P(\Omega) = 1$

La funzione prende il nome di **Misura di probabilità**.

TEORIA ASSIOMATICA DELLA PROBABILITÀ

Nella Teoria assiomatica della Probabilità, un fenomeno aleatorio è descritto per mezzo dei seguenti concetti:

- ◆ Uno *spazio dei risultati* Ω
- ◆ Una *classe di eventi* F costituenti una σ -algebra
- ◆ Una *misura di probabilità* P che soddisfi gli assiomi sopra esposti.

Ad un fenomeno aleatorio è associato dunque uno **Spazio di Probabilità** rappresentato dalla *terna* (Ω, F, P) . Si dirà misurabile ogni elemento di F e ammissibile ogni evento corrispondente.

○ *Esempio*: Una σ -algebra di grande interesse nella descrizione di un fenomeno aleatorio con spazio dei risultati $\Omega \equiv \mathfrak{R}$ è il CAMPO di BOREL. Esso è *la più piccola σ -algebra che contiene la classe degli intervalli illimitati inferiormente*, ovvero è la classe di insiemi generata a partire dagli intervalli illimitati inferiormente mediante le operazioni di complementazione, unione (finita o infinita), e intersezione (finita o infinita).

TEOREMI FONDAMENTALI

➤ **Teorema della probabilità dell'evento complementare:**

Dato un evento ammissibile con Probabilità $Pr\{E\}$, la probabilità dell'evento complementare $Pr\{non-E\}$ è pari a

$$Pr\{non-E\} = 1 - Pr\{E\}$$

Dim.: Poichè, l'insieme $E \Leftrightarrow (E)$ è misurabile, lo è anche l'insieme $\overline{E} \Leftrightarrow (non E)$. Inoltre, poichè gli insiemi E e \overline{E} sono disgiunti e vale la $E \cup \overline{E} = \Omega$, si ha

$$P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E}) = P(\Omega) = 1$$

da cui segue la tesi.

➤ *Corollario*

La probabilità dell'evento impossibile è nulla.

Dim. All'evento impossibile corrisponde l'insieme vuoto, che è il complemento di Ω in Ω . Dall'assioma 4 e dal Teorema dell'evento complementare segue la tesi.

TEOREMI FONDAMENTALI (SEGUE)

➤ **Teorema delle probabilità totali:**

Dati due eventi ammissibili A , B , *non necessariamente mutuamente escludentesi*, con Probabilità $Pr\{A\}$, $Pr\{B\}$, l'evento $(A \text{ o } B)$ è ammissibile, e la sua probabilità vale:

$$Pr\{A \text{ o } B\} = Pr\{A\} + Pr\{B\} - Pr\{A \text{ e } B\}$$

ovvero in termini di insiemi

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$$

Dim.: L'insieme $A \cup B$ può essere espresso come unione di tre insiemi disgiunti: $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$, per cui

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B)$$

Poiché $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$, $B = (B \cap \bar{A}) \cup (B \cap A)$, si ha

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \\ P(B) &= P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B), \\ P(B \cap \bar{A}) &= P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Sostituendo le precedenti espressioni in $P(A \cup B)$ segue la tesi.

EVENTO CONDIZIONATO

Fenomeno aleatorio condizionato

- Dato un fenomeno aleatorio descritto dallo spazio di probabilità associato (Ω_F, F_F, P_F) , ed un evento ammissibile Γ corrispondente ad un insieme $C \in F_F$, si dice **fenomeno aleatorio condizionato all'evento Γ** il fenomeno aleatorio ottenuto da quello di partenza scartando i casi in cui l'evento Γ non si verifica. Rispetto al fenomeno aleatorio condizionato, il generico evento E è rappresentato dall'insieme $E \cap \Gamma$.

Spazio di probabilità associato al fenomeno aleatorio condizionato

- Si assume come *spazio base* del fenomeno aleatorio condizionato l'insieme $\Omega_C = C$.
- Si assume come σ -algebra del fenomeno aleatorio condizionato la σ -algebra ottenuta da F_F per *intersezione* con l'insieme C .
- Si deve infine definire la misura di probabilità del fenomeno aleatorio condizionato $P_{F|\Gamma}$, o *misura di probabilità condizionata a Γ*

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

➤ La misura di probabilità di un evento E condizionata a Γ

$$P_{F|\Gamma}(E) = \Pr\{E \cap C\}$$

è scelta proporzionale a $P_F(E)$:

$$P_{F|\Gamma}(E) = k P_F(E \cap C)$$

così da soddisfare gli assiomi 1-3. La costante k è scelta in modo da soddisfare l'assioma 4, con $P_{F|\Gamma}(\Omega_C) = P_{F|\Gamma}(C) = 1$:

$$k = 1/P_F(C)$$

Si procede perciò alla seguente definizione formale

➤ *Def.:* Dato un evento ammissibile Γ con misura di probabilità $\Pr\{\Gamma\} > 0$, si definisce misura di probabilità condizionata di un evento E rispetto a Γ il rapporto:

$$\Pr\{E|\Gamma\} = \frac{\Pr\{E \cap \Gamma\}}{\Pr\{\Gamma\}}$$

ovvero in termini di insiemi

$$P_{F|\Gamma}(E) = \frac{P_F(E \cap C)}{P_F(C)}$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA

Secondo *l'approccio frequentistico* la probabilità dell'evento “ E e Γ ” è pari al rapporto fra il numero di volte in cui occorre l'evento $N_{E \text{ e } \Gamma}$ e il numero di prove totali rispetto al fenomeno aleatorio condizionato, cioè N_{Γ} :

$$N_{E \text{ e } \Gamma} / N_{\Gamma}$$

Indicando con N il numero di prove totali, la probabilità del fenomeno aleatorio condizionato si può scrivere:

$$(N_{E \text{ e } \Gamma} / N) / (N_{\Gamma} / N)$$

Per la *legge dei grandi numeri*, all'aumentare del numero N di prove totali, i rapporti di frequenza a numeratore e a denominatore tendono rispettivamente a $\Pr(E \text{ e } \Gamma)$ e a $\Pr(\Gamma)$. La definizione introdotta è quindi in accordo con l'evidenza sperimentale.

INDIPENDENZA STATISTICA

○ In generale il sapere che si è verificato l'evento Γ modifica la conoscenza circa il contemporaneo verificarsi dell'evento E . Infatti:

$$\Pr\{E|\Gamma\} \neq \Pr\{E\}$$

Se la conoscenza che si sia verificato Γ non porta alcuna conoscenza riguardo ad E , i due eventi si dicono statisticamente indipendenti.

➤ *Def.1* Un evento E si dice *statisticamente indipendente* dall'evento Γ se e solo se

$$\Pr\{E|\Gamma\} = \Pr\{E\}$$

○ Poichè se l'evento E è statisticamente indipendente dall'evento Γ risulta

$$\Pr\{E \text{ e } \Gamma\} = \Pr\{\Gamma\} \Pr\{E\}$$

l'indipendenza statistica è una proprietà reciproca:

$$\Pr\{\Gamma|E\} = \frac{\Pr\{E \text{ e } \Gamma\}}{\Pr\{E\}} = \Pr\{\Gamma\}$$

➤ *Def.2* Due eventi E e Γ si dicono *statisticamente indipendenti* se e solo se

$$\Pr\{E|\Gamma\} = \Pr\{E\}, \text{ ovvero}$$

$$\Pr\{\Gamma|E\} = \Pr\{\Gamma\} \text{ ovvero,}$$

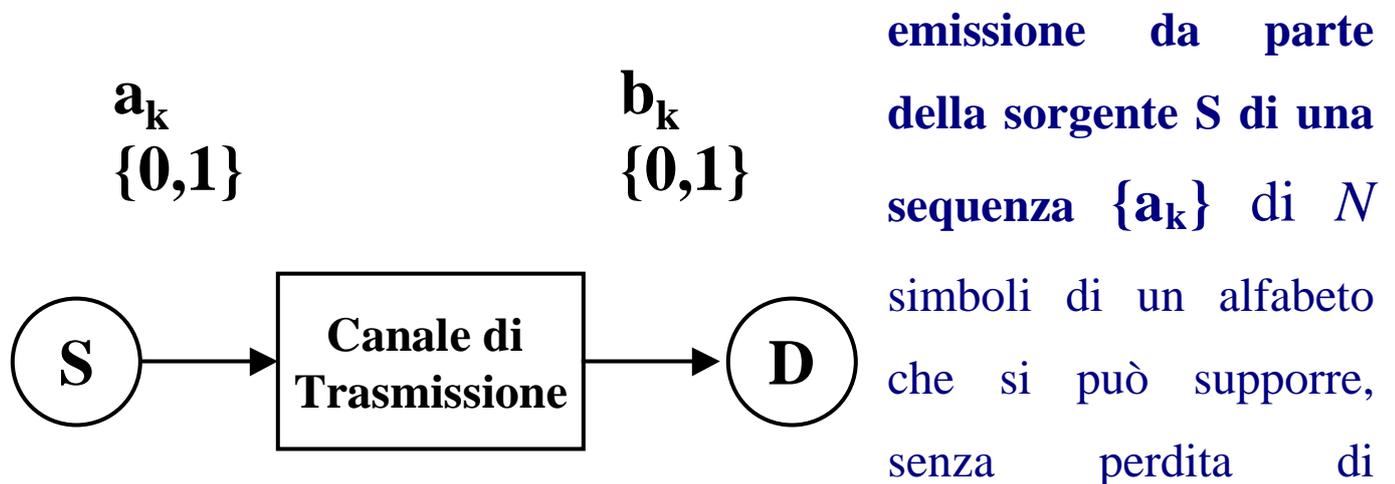
$$\Pr\{E \text{ e } \Gamma\} = \Pr\{\Gamma\} \Pr\{E\}.$$

TEOREMA DI BAYES

Si consideri un fenomeno aleatorio complesso, cui siano associati due fenomeni aleatori semplici interconnessi fra loro, di cui solo uno direttamente osservabile.

➤ *Esempio*

Si consideri un sistema di trasmissione in cui il canale introduce un errore di trasmissione. Un primo fenomeno aleatorio è costituito dalla



generalità, binario. Il secondo fenomeno aleatorio è costituito dalla **ricezione da parte del destinatario D di una sequenza di simboli**

$\{b_k\}$ che, a causa degli errori introdotti dal canale, non coincide necessariamente con $\{a_k\}$. Ai due fenomeni semplici possiamo

associare due spazi base Ω_1 , Ω_2 e al fenomeno aleatorio complessivo lo spazio base: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (*spazio congiunto*). Ad es.,

per $N=1$, $\Omega_1 = \{0,1\}$, $\Omega_2 = \{0,1\}$, $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)\}$.

TEOREMA DI BAYES

➤ *Esempio (segue)*

Le **conoscenze a priori sulla sorgente** si traducono sulla conoscenza delle probabilità con cui la sorgente emette i simboli $\{a_k\}$, ovvero sono note le:

$$p_0 = \Pr\{a_k=0\},$$

$$p_1 = \Pr\{a_k=1\} = 1 - p_0$$

Le **conoscenze a priori sui meccanismi fisici di trasmissione** si traducono sulla conoscenza delle probabilità dei simboli ricevuti $\{b_k\}$ condizionate ai simboli emessi $\{a_k\}$, ovvero sono note le:

$$\Pr\{b_k=0 \mid a_k=0\},$$

$$\Pr\{b_k=0 \mid a_k=1\},$$

$$\Pr\{b_k=1 \mid a_k=0\},$$

$$\Pr\{b_k=1 \mid a_k=1\},$$

TEOREMA DI BAYES

➤ *Esempio (segue)*

Il Teorema di Bayes risponde alla domanda: se il simbolo ricevuto $b_k=1$, qual'è la probabilità che il simbolo emesso sia $a_k=1$ (ovvero, se il canale è invertente, $a_k=0$) ? ovvero, come si calcolano le probabilità

$$\Pr\{ a_k=0 \mid b_k=0 \},$$

$$\Pr\{ a_k=0 \mid b_k=1 \},$$

$$\Pr\{ a_k=1 \mid b_k=0 \},$$

$$\Pr\{ a_k=1 \mid b_k=1 \},$$

a partire da quelle note?

In altre parole, dato un fenomeno complesso, cui siano associati due fenomeni semplici, il Teorema di Bayes consente di calcolare le probabilità condizionate del primo fenomeno rispetto al secondo a partire dalle probabilità condizionate del secondo fenomeno rispetto al primo e alle probabilità semplici del primo.

TEOREMA DI BAYES

➤ *Teorema di Bayes*

Si consideri un fenomeno aleatorio con spazio base Ω , e due partizioni $\{E_1, \dots, E_n\}$, $\{C_1, \dots, C_m\}$ di Ω , (ovvero $\cup_j E_j$ con $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\cup_j C_j$ con $C_i \cap C_j = \emptyset$, $i \neq j$), corrispondenti rispettivamente alla serie completa di eventi mutuamente escludentesi $\{E_1, \dots, E_n\}$, e alla serie completa di eventi mutuamente escludentesi $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_m\}$.

Note le probabilità $P(\Gamma_i)$, $i=1, \dots, m$, e le probabilità condizionate $P(E_i | \Gamma_j)$, $i=1, \dots, n$, $j=1, \dots, m$, la probabilità condizionata dell'evento Γ_h $h=1, \dots, m$ rispetto all'evento E_i , è data da

$$\Pr(\Gamma_h | E_i) = \frac{\Pr(E_i | \Gamma_h) \Pr(\Gamma_h)}{\sum_{j=1}^m \Pr(E_i | \Gamma_j) \Pr(\Gamma_j)}$$

TEOREMA DI BAYES

➤ *Teorema di Bayes (segue)*

Dim. Dalla definizione di probabilità condizionata (applicata prima all'evento Γ_h e poi all'evento E_i) si ha

$$\Pr(\Gamma_h | E_i) = \frac{\Pr(E_i \text{ e } \Gamma_h)}{\Pr(E_i)} = \frac{\Pr(E_i | \Gamma_h) \Pr(\Gamma_h)}{\Pr(E_i)}$$

Inoltre, poichè è possibile esprimere l'insieme E_i in funzione degli partizione rappresentata dagli insiemi (disgiunti) C_j come:

$$E_i = \bigcup_{j=1}^m (E_i \cap C_j)$$

Essendo gli insiemi $E_i \cap C_j$ disgiunti, per il terzo assioma si ha

$$\begin{aligned} P(E_i) &= P\left(\bigcup_{j=1}^m (E_i \cap C_j)\right) \\ &= \sum_{j=1}^m P(E_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^m \Pr(E_i \cap C_j) = \sum_{j=1}^m \Pr(E_i \text{ e } \Gamma_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \Pr(E_i | \Gamma_j) \Pr(\Gamma_j) \end{aligned}$$

Sostituendo il risultato nella prima equazione segue la tesi.

TEOREMA DI BAYES

Poichè nella dimostrazione del teorema ricorre la sola partizione $\{C_1, \dots, C_m\}$, il Teorema di Bayes ammette la seguente formulazione alternativa

➤ *Teorema di Bayes*

Dato un fenomeno aleatorio con spazio base Ω , si consideri una partizione $\{C_1, \dots, C_m\}$ di Ω , (ovvero $\cup_j C_j$ con $C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j$), corrispondente rispettivamente alla serie completa di eventi mutuamente escludentesi Γ_i . ed un evento *ammissibile* E .

Note le probabilità $P(\Gamma_i), i=1, \dots, m$, e le probabilità condizionate $P(E | \Gamma_i), i=1, \dots, m$, la probabilità condizionata dell'evento $\Gamma_h, h=1, \dots, m$ rispetto all'evento E , è data da

$$\Pr(\Gamma_h | E) = \frac{\Pr(E | \Gamma_h) \Pr(\Gamma_h)}{\sum_{j=1}^m \Pr(E | \Gamma_j) \Pr(\Gamma_j)}$$

VARIABILI ALEATORIE

Obiettivo: Esprimere le Probabilità di Eventi non solo tramite funzioni di insieme ma anche tramite **funzioni di punto**.

➤ Una variabile aleatoria X è una trasformazione dallo spazio Ω nello spazio euclideo n-dimensionale R^n

$$X : \Omega \rightarrow R^n$$

che soddisfa alcune particolari *condizioni*, sotto cui è possibile individuare una funzione di punto

$$D_{\underline{X}}(\underline{x}) : R^n \rightarrow [0,1]$$

che consenta di calcolare la probabilità di ogni evento ammissibile del fenomeno aleatorio di partenza. In particolare, le condizioni imposte alla X sono tali che sia possibile associare *ad ogni punto* di R^n un *insieme* di Ω che rappresenti un *evento ammissibile*.

VARIABILI ALEATORIE

➤ *Esempio:*

Sia dato un fenomeno aleatorio rappresentato da uno spazio di probabilità (Ω, F, P) , dove

- Lo spazio dei risultati Ω coincide con lo spazio euclideo unidimensionale R
- La σ -algebra F è il Campo di Borel F_B generato a partire dagli intervalli illimitati inferiormente del tipo $-\infty < X \leq \xi$

Ora si osservi che

- La misura di probabilità di intervalli di tale tipo è funzione del solo estremo superiore, e può essere indicata con $D_X(\xi)$:

$$D_X(\xi) \stackrel{\Delta}{=} P(-\infty < X \leq \xi)$$

- Poiché ogni elemento E di F_B è ottenibile come complementazione, intersezione, unione finita o infinita numerabile di intervalli di tale tipo, la misura di probabilità di E è ottenibile a partire da $D_X(\xi)$ mediante l'integrale di Lebesgue Stieltjes

$$P(E) = \int_E dD_X(\xi)$$

VARIABILI ALEATORIE

➤ *Esempio:*

Il caso precedente può essere generalizzato immediatamente al caso di spazio dei risultati Ω coincidente con lo spazio euclideo n -dimensionale R^n .

La σ -algebra F è il Campo di Borel F_B generato a partire dagli intervalli illimitati inferiormente del tipo

$$-\infty < X_i \leq \xi_i, \quad i = 1, \dots, n$$

La misura di probabilità di intervalli di tale tipo è funzione del solo estremo superiore ξ :

$$D_{\underline{X}}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \stackrel{\Delta}{=} P(-\infty < X_i \leq \xi_i, i = 1, \dots, n)$$

Per ogni elemento E di F_B la misura di probabilità di E è ottenibile a partire da $D_{\underline{X}}(\xi)$ mediante l'integrale di Lebesgue Stieltjes

$$P(E) = \int_E dD_{\underline{X}}(\xi_1, \dots, \xi_n)$$

VARIABILI ALEATORIE

- Uno spazio di probabilità (R^n, F_B, D_X) , tale cioè che lo spazio dei risultati Ω sia lo spazio euclideo n -dimensionale R^n e la σ -algebra F sia il Campo di Borel F_B , consente di **rappresentare la Probabilità di un Evento mediante una funzione di punto D_X** .
- Si è perciò interessati a definire variabile aleatoria $X(\omega)$ una trasformazione tale che ad uno spazio di probabilità (Ω, F, P) associ lo spazio di probabilità (R^n, F_B, D_X) .
- Si richiede dunque che comunque si prenda un insieme E appartenente a F_B l'insieme A costituito dai punti $\omega \in \Omega$ che si trasformano in punti di E (*immagine inversa di E*) rappresenti un evento ammissibile, ovvero appartenga a F .
- Poiché ogni insieme di F_B è ottenibile a partire dagli intervalli illimitati inferiormente, è sufficiente richiedere che l'immagine inversa di ogni intervallo illimitato inferiormente sia un evento ammissibile.

VARIABILI ALEATORIE

➤ *Def.* Dato uno spazio di probabilità (Ω, F, P) , si definisce **variabile aleatoria** $X(\omega)$ una qualsiasi funzione X :

$$X : \Omega \rightarrow R^n$$

tale che per ogni punto ξ di R^n l'insieme A corrispondente in Ω :

$$A = \{\omega \in \Omega, \omega \mid -\infty < X_i(\omega) \leq \xi_i, i = 1, \dots, n\}$$

appartenga ad F , ovvero rappresenti un evento ammissibile. In altre parole la funzione sia **F -misurabile**.

○ *Commento:* Se il numero di punti dello spazio base Ω è finito o infinito numerabile, e la trasformazione da Ω in R^n è biunivoca, l'insieme S dei punti $\underline{x}_i = X(\omega_i)$ è ancora finito o infinito numerabile

e risulta:
$$\sum_{\underline{x}_i \in S} P(\omega \mid \underline{X}(\omega) = \underline{x}_i) = 1.$$

➤ *Def:* Una v.a. $X(\omega)$ si dice **discreta** se esiste un insieme $S = \{ \underline{x}_i \}$ finito o infinito numerabile tale che
$$\sum_{\underline{x}_i \in S} P(\omega \mid \underline{X}(\omega) = \underline{x}_i) = 1.$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

➤ La funzione di distribuzione $D_{\underline{X}}(\underline{x})$ è una *funzione di punto* che può essere interpretata come la probabilità che le componenti X_i , $i=1,..n$ della variabile aleatoria X siano minori o uguali di x_i , $i=1,..n$:

$$D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\Delta}{=} \Pr\{X_i \leq x_i, i = 1, \dots, n\}$$

➤ La funzione di distribuzione $D_{\underline{X}}(\underline{x})$ è

○ *Non-negativa*

$$D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

○ *Non decrescente*

$$D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) \geq D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$\Delta x_i > 0, i = 1, \dots, n$$

○ *Continua da destra*

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) = D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$\Delta x_i > 0, i = 1, \dots, n$$

○ *Tende a 0 al tendere a $-\infty$ di almeno una delle componenti*

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow -\infty} D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

○ *Tende a 1 al tendere a $+\infty$ di tutte le componenti*

$$\lim_{\Delta x_1, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_n \rightarrow +\infty} D_{\underline{X}}(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n + \Delta x_n) = 1$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

➤ La probabilità di un evento ammissibile E , cui corrisponde un insieme E di R^n , può essere calcolata come l'integrale di Lebesgue-Stieltjes

$$\Pr(\mathbf{E}) = \int_E dD_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)$$

➤ Si è interessati a stabilire le condizioni sotto cui il precedente integrale può essere sostituito da un integrale di Lebesgue.

➤ *Def.* Data una misura di probabilità P_x definita sul Campo di Borel F_B , essa è detta *singolare* (rispetto alla misura di Lebesgue) se esiste un insieme $S \in R^n$ tale che la sua misura di Lebesgue sia nulla e risulti

$$P_x(S) = 1$$

➤ *Def.* Data una misura di probabilità P_x definita sul Campo di Borel F_B , essa è detta *assolutamente continua* (rispetto alla misura di Lebesgue) se per ogni insieme $S \in R^n$ tale che la sua misura di Lebesgue sia nulla risulti

$$P_x(S) = 0$$

FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ

➤ E' possibile dimostrare che se la *misura di probabilità* P_x è *assolutamente continua* rispetto alla *misura di Lebesgue*, allora esiste ed è unica una funzione non negativa $p_{\underline{X}}(x_1, x_n)$ tale che

$$\begin{aligned}\Pr(\mathbf{E}) &= P_x(E) \\ &= \int_E dD_{\underline{X}}(x_1, x_n) \\ &= \int_E p_{\underline{X}}(x_1, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n\end{aligned}$$

dove il secondo integrale è un integrale di Lebesgue.

➤ La funzione $p_{\underline{X}}(x_1, x_n)$ prende il nome di **funzione di densità di probabilità**.

FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ

○ *Commento:*

Si osservi che, dato un intervallo

$$T_n = \left\{ \underline{X} \in R^n \mid x_i < X_i \leq x_i + \Delta x_i, i = 1, \dots, n \right\}$$

esiste (*Teorema della media*) un punto interno $\underline{x}' \in T_n$ tale che

$$\begin{aligned} P_x(T_n) &= \int_{T_n} p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= p_{\underline{X}}(x_1', \dots, x_n') \Delta x_1 \Delta x_2 \dots \Delta x_n \end{aligned}$$

Al tendere a zero della misura di Lebesgue dell'intervallo risulta

$$\Pr \left\{ x_i < X_i \leq x_i + dx_i, i = 1, \dots, n \right\} = p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

La funzione $p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)$ rappresenta quindi una *densità* di probabilità.

Si osservi nuovamente che la misura di probabilità associata al singolo punto di R^n è nulla (ciò che garantisce l'assoluta continuità della misura di probabilità rispetto alla misura di Lebesgue).

FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ

Per la funzione di densità di probabilità valgono le seguenti relazioni:

$$D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\underline{X}}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

ovvero

$$p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$$

laddove la derivata a secondo membro esista.

Inoltre, essendo la $D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)$ non negativa risulta:

$$p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0$$

e, poichè la $D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)$ tende a 1 al tendere a $+\infty$ di tutte le componenti, si ha ancora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\underline{X}}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n = 1$$

FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ

➤ Se la misura di probabilità P_x è *singolare* rispetto alla *misura di Lebesgue*, ovvero esistono insiemi dell'asse reale di misura di Lebesgue nulla cui compete misura di probabilità non nulla, allora, ricorrendo all'impulso matematico, si può ancora definire una funzione $p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n)$ tale che valga la relazione integrale

$$D_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} p_{\underline{X}}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

➤ In generale vale la seguente *Decomposizione di Lebesgue*:

Una misura di probabilità P_x può essere decomposta nella forma

$$P_x(E) = \alpha P_x^{(1)}(E) + (1 - \alpha) P_x^{(2)}(E) \quad \forall E \in F_B$$

dove $P_x^{(1)}(E)$ è una misura di probabilità assolutamente continua e $P_x^{(2)}(E)$ è una misura di probabilità singolare ($0 \leq \alpha \leq 1$).

VARIABILI ALEATORIE MARGINALI (R^2)

- Si consideri un fenomeno aleatorio F , cui sia associata la v.a. bidimensionale $X=(X_1, X_2)$, caratterizzata da funzione di distribuzione $D_{X_1X_2}(x_1, x_2)$, ovvero da funzione di densità di probabilità $p_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ (caso di v.a. continua), ovvero da una funzione di probabilità p_{ik} (caso di v.a. discreta). Si consideri quindi il fenomeno aleatorio ottenuto considerando come risultato non la coppia di determinazioni ($X_1=x_1, X_2=x_2$), ma la sola determinazione ($X_1=x_1$).
- La funzione $X_1:\Omega\rightarrow R$ è una *variabile aleatoria*, che prende il nome di *variabile aleatoria marginale*, caratterizzata dalla *funzione di distribuzione marginale*

$$D_{X_1}(x_1) = D_{X_1X_2}(x_1, \infty)$$

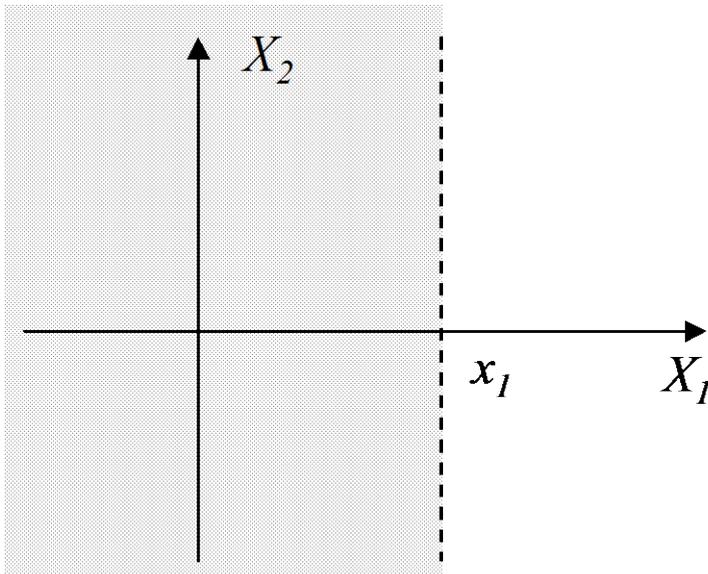
e dalla *funzione di densità di probabilità marginale*

$$p_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1X_2}(x_1, \xi_2) d\xi_2$$

(ovvero dalla *funzione di probabilità* $p_i = \sum_k p_{ik}$)

VARIABILI ALEATORIE MARGINALI (R^2)

► *Dim.:*



La *variabile aleatoria marginale* $X_1: \Omega \rightarrow R$ è caratterizzata dalla *funzione di distribuzione*

$$\begin{aligned} D_{X_1}(x_1) &= \Pr\{X_1 \leq x_1\} \\ &= \Pr\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq +\infty\} \\ &= D_{X_1 X_2}(x_1, \infty) \end{aligned}$$

La *funzione di densità di probabilità* della v.a. marginale è

$$D_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} p_{X_1}(\xi_1) d\xi_1$$

e dal confronto con la

$$D_{X_1}(x_1) = D_{X_1 X_2}(x_1, +\infty) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1 X_2}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

segue la tesi.

VARIABILI ALEATORIE MARGINALI (R^n)

➤ Si consideri un fenomeno aleatorio F , cui sia associata la v.a. n -dimensionale $X=(X_1, \dots, X_n)$, caratterizzata da funzione di distribuzione $D_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$, ovvero da funzione di densità di probabilità $p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ (caso di v.a. continua), ovvero da una funzione di probabilità $p_{i_1 \dots i_n}$ (caso di v.a. discreta). Si consideri quindi il fenomeno aleatorio ottenuto considerando come risultato le determinazioni relative al sottospazio di dimensione m (X_1, \dots, X_m), con $m < n$.

➤ L'insieme di funzioni $\underline{X}_m=(X_1, \dots, X_m)$ da Ω in R^m , è una *variabile aleatoria m -dimensionale*, che prende il nome di *variabile aleatoria marginale*, caratterizzata dalla *funzione di distribuzione marginale*

$$D_{\underline{X}_m}(x_1, \dots, x_m) = D_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_m, \underbrace{\infty, \dots, \infty}_{n-m})$$

e dalla *funzione di densità di probabilità marginale*

$$p_{\underline{X}_m}(x_1, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_n) d\xi_{m+1} \dots d\xi_n$$

(ovvero dalla funzione di probabilità)

$$p_{i_1 \dots i_m} = \sum_{j_{m+1} \dots j_n} p_{i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_n}$$

VARIABILI ALEATORIE CONDIZIONATE AD UN EVENTO (R)

- Si consideri un fenomeno aleatorio rappresentato dallo spazio di probabilità (Ω, F, P) , cui sia associata la v.a. unidimensionale X , caratterizzata da funzione di distribuzione $D_X(x)$, ovvero da funzione di densità di probabilità $p_X(x)$ (caso di v.a. continua). Si consideri un evento $\Gamma \Leftrightarrow C$, ed il fenomeno aleatorio condizionato all'evento Γ , rappresentato dallo spazio $(\Omega_\Gamma, F_\Gamma, P_\Gamma)$.
- La funzione $X|C : \Omega_\Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ è una *variabile aleatoria*, che prende il nome di *variabile aleatoria condizionata a C* , caratterizzata dalla *funzione di densità di probabilità condizionata a C*

$$p_{X|C}(x) = \begin{cases} \frac{p_X(x)}{\int_C p_X(\xi) d\xi} & x \in C \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si ha infatti

$$\Pr\{E | \Gamma\} = \frac{\Pr\{E \cap \Gamma\}}{\Pr\{\Gamma\}} = \frac{\int_{E \cap C} p_X(\gamma) d\gamma}{\int_C p_X(\xi) d\xi}$$

VARIABILI ALEATORIE CONDIZIONATE AD UN EVENTO (\mathbb{R}^2)

➤ Si consideri un fenomeno aleatorio rappresentato dallo spazio di probabilità (Ω, F, P) , cui sia associata la v.a. bidimensionale $X=(X_1, X_2)$, caratterizzata da funzione di distribuzione $D_{X_1X_2}(x_1, x_2)$, ovvero da funzione di densità di probabilità $p_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ (caso di v.a. continua). Si consideri un evento $\Gamma \Leftrightarrow C$, ed il fenomeno aleatorio condizionato all'evento Γ , rappresentato dallo spazio $(\Omega_\Gamma, F_\Gamma, P_\Gamma)$.

➤ La funzione $X|C : \Omega_\Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ è una *variabile aleatoria bidimensionale*, che prende il nome di *variabile aleatoria condizionata a C*, caratterizzata dalla *f. di densità di probabilità condizionata a C*

$$p_{X|C}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{p_X(x_1, x_2)}{\int_C p_X(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2} & (x_1, x_2) \in C \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Infatti:

$$\Pr\{E \mid \Gamma\} = \frac{\Pr\{E \cap \Gamma\}}{\Pr\{\Gamma\}} = \frac{\int_{E \cap C} p_X(\gamma_1, \gamma_2) d\gamma_1 d\gamma_2}{\int_C p_X(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}$$

VARIABILI ALEATORIE CONDIZIONATE AD UN EVENTO (R^n)

- Si consideri un fenomeno aleatorio rappresentato dallo spazio di probabilità (Ω, F, P) , cui sia associata la v.a. n -dimensionale $X=(X_1, \dots, X_n)$, caratterizzata da funzione di distribuzione $D_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$, ovvero da funzione di densità di probabilità $p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ (caso di v.a. continua). Si consideri un evento $\Gamma \Leftrightarrow C$, ed il fenomeno aleatorio condizionato all'evento Γ , rappresentato dallo spazio $(\Omega_\Gamma, F_\Gamma, P_\Gamma)$.
- La funzione $X/C : \Omega_\Gamma \rightarrow R^n$ è una *variabile aleatoria n -dimensionale*, che prende il nome di *variabile aleatoria condizionata a C* , caratterizzata dalla *f. di densità di probabilità condizionata a C*

$$p_{X|C}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{p_X(x_1, \dots, x_n)}{\int_C p_X(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \cdots d\xi_n}, & (x_1, \dots, x_n) \in C \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

VARIABILI ALEATORIE MARGINALI CONDIZIONATE (\mathbb{R}^2)

➤ Si consideri un fenomeno aleatorio rappresentato dallo spazio di probabilità (Ω, F, P) , cui sia associata la v.a. bidimensionale $X=(X_1, X_2)$, caratterizzata da funzione di distribuzione $D_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$, ovvero da funzione di densità di probabilità $p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$ (caso di v.a. continua). Si consideri il **fenomeno aleatorio marginale condizionato a $X_2=x_2$** , ottenuto

- ◆ Scartando i risultati per i quali $X_2 \neq x_2$
- ◆ Considerando come risultato la sola determinazione $(X_1=x_1)$
- La funzione $X_1 / x_2 : \Omega_{x_2} \rightarrow \mathbb{R}$ è una *variabile aleatoria unidimensionale*, che prende il nome di *variabile aleatoria*

(marginale) condizionata a $X_2=x_2$, caratterizzata dalla funzione di densità di probabilità condizionata a $X_2=x_2$

$$p_{X_1|X_2}(x_1 | x_2) = \frac{p_{X_1X_2}(x_1, x_2)}{p_{X_2}(x_2)}$$

data dalla densità di probabilità *congiunta* $p_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ fratto la densità di probabilità *marginale condizionante* $p_{X_2}(x_2)$.

VARIABILI ALEATORIE MARGINALI CONDIZIONATE (\mathbb{R}^n)

➤ Dato un fenomeno aleatorio rappresentato dallo spazio di probabilità (Ω, F, P) , cui sia associata la v.a. n -dimensionale $X=(X_1, \dots, X_n)$, caratterizzata da $D_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$, ovvero da $p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n)$ (caso di v.a. continua), si consideri il **fenomeno aleatorio marginale condizionato a $X_{m+1} \dots X_n = x_{m+1} \dots x_n$** , ottenuto

◆ Scartando i risultati per i quali $X_{m+1} \dots X_n \neq x_{m+1} \dots x_n$

◆ Considerando come risultato le sole determinazioni $(X_1 \dots X_m = x_1 \dots x_m)$

➤ La funzione $X_1 \dots X_m / x_{m+1} \dots x_n : \Omega_{x_{m+1} \dots x_n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una *variabile aleatoria m -dimensionale*, che prende il nome di *variabile aleatoria (marginale) condizionata a $X_{m+1} \dots X_n = x_{m+1} \dots x_n$* , caratterizzata dalla *funzione di densità di probabilità condizionata a $X_{m+1} \dots X_n = x_{m+1} \dots x_n$*

$$p_{X_1, \dots, X_m | X_{m+1}, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_m | x_{m+1}, \dots, x_n) = \frac{p_X(x_1, \dots, x_n)}{p_{X_{m+1}, \dots, X_n}(x_{m+1}, \dots, x_n)}$$

data dalla densità di probabilità *congiunta* fratto la densità di probabilità *marginale condizionante*.

VARIABILI ALEATORIE STATISTICAMENTE INDIPENDENTI

- *Def.:* Data una v.a. bidimensionale $X=(X_1, X_2)$, le variabili aleatorie marginali ad essa associate X_1, X_2 , si dicono **statisticamente indipendenti** se qualunque evento marginale E_1 definito per X_1 è statisticamente indipendente qualunque evento marginale E_2 definito per X_2 .
- *C.N.E.S.* affinché le variabili aleatorie X_1, X_2 , siano statisticamente indipendenti è che sia verificata la:

$$p_{X_1X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2)$$

cioè la densità di probabilità congiunta fattorizzi nel prodotto delle densità di probabilità marginali, ovvero che

$$D_{X_1X_2}(x_1, x_2) = D_{X_1}(x_1) \cdot D_{X_2}(x_2)$$

ovvero

$$p_{X_1|X_2}(x_1 | x_2) = p_{X_1}(x_1)$$

ovvero che

$$p_{X_2|X_1}(x_2 | x_1) = p_{X_2}(x_2)$$

VARIABILI ALEATORIE STATISTICAMENTE INDIPENDENTI

➤ *Def.:*Data una v.a. n-dimensionale $X=(X_1,.. X_n)$, le variabili aleatorie marginali unidimensionali ad essa associate $X_1... X_n$, si dicono **statisticamente indipendenti** se qualunque evento marginale E_k definito per la generica variabile aleatoria marginale X_k è statisticamente indipendente da qualunque evento marginale E_c definito per la variabile aleatoria complementare a X_k .

➤ *C.N.E.S.* affinché le variabili aleatorie $X_1... X_n$, siano statisticamente indipendenti è che sia verificata la:

$$p_X(x_1, x_2 \dots x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot p_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n)$$

cioè la densità di probabilità congiunta fattorizzi nel prodotto delle densità di probabilità marginali, ovvero la funzione di distribuzione congiunta fattorizzi nel prodotto delle distribuzioni marginali.

$$D_X(x_1, x_2 \dots x_n) = D_{X_1}(x_1) \cdot D_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot D_{X_n}(x_n)$$

VALORI ATTESI CONDIZIONATI

- Sia X una variabile aleatoria n -dimensionale, e Y una variabile aleatoria q -dimensionale. Sia inoltre $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una generica funzione m -dimensionale della variabile aleatoria n -dimensionale X .
- Si definisce *valore atteso di f condizionato a Y* il valore atteso di f rispetto alla variabile aleatoria $X|Y$:

$$E\{f(x_1, \dots, x_n) \mid y_1, \dots, y_q\} = \int f(x_1, \dots, x_n) p_{X|Y}(x_1, \dots, x_n \mid y_1, \dots, y_q) dx_1 \cdots dx_n$$

Tale valore atteso è in generale funzione della determinazione y_1, \dots, y_q della variabile aleatoria Y . Analogamente si definiscono i *momenti misti condizionati di X rispetto a Y*

$$E\{x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} \mid y_1, \dots, y_q\} = \int x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} p_{X|Y}(x_1, \dots, x_n \mid y_1, \dots, y_q) dx_1 \cdots dx_n$$

- Data una v.a. bidimensionale $X=(X_1, X_2)$, il valore medio della v.a. marginale X_1 condizionato alla v.a. X_2

$$\varphi(x_2) = E\{x_1 \mid x_2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 p_{X_1|X_2}(x_1 \mid x_2) dx_1$$

prende il nome di *curva di regressione di X_1 rispetto a X_2*

FUNZIONI MISURABILI DI V. A.:

CAMBIAMENTO DI VARIABILE

➤ Sia X una variabile aleatoria unidimensionale, e sia $f:R \rightarrow R$ una funzione unidimensionale della variabile aleatoria X :

$$y = f(x)$$

tale che

- l'immagine inversa di ogni intervallo illimitato inferiormente è misurabile secondo la misura di probabilità $D_X(x)$
- la misura di probabilità dell'immagine inversa di un intervallo illimitato inferiormente $(-\infty, y]$ tende a 0 al tendere di y a $-\infty$
- la misura di probabilità dell'immagine inversa di un intervallo illimitato inferiormente $(-\infty, y]$ tende a 1 al tendere di y a $+\infty$

allora

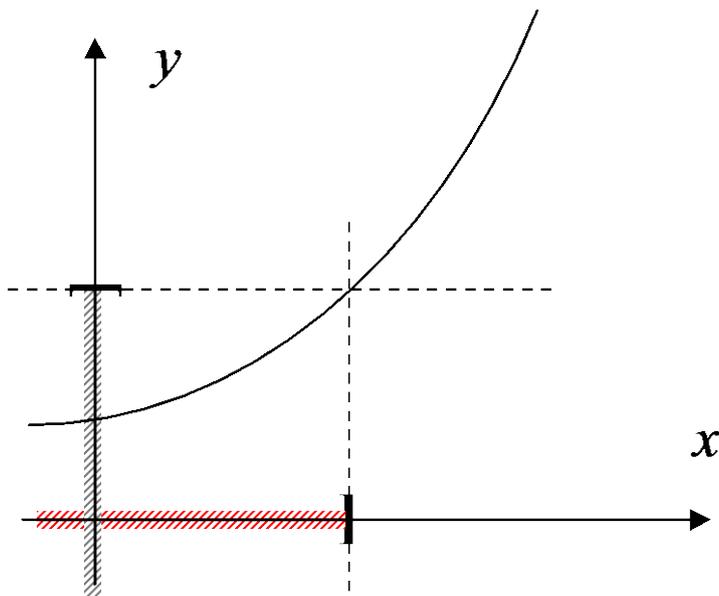
➤ **$Y=f(X)$ costituisce una variabile aleatoria unidimensionale definita sullo stesso spazio base della variabile X**

FUNZIONI MISURABILI DI V. A.:

CAMBIAMENTO DI VARIABILE

➤ Sia $y = f(x)$ *monotona crescente o decrescente*, con $f'(x) \neq 0$ in un insieme di punti finito o infinito numerabile.

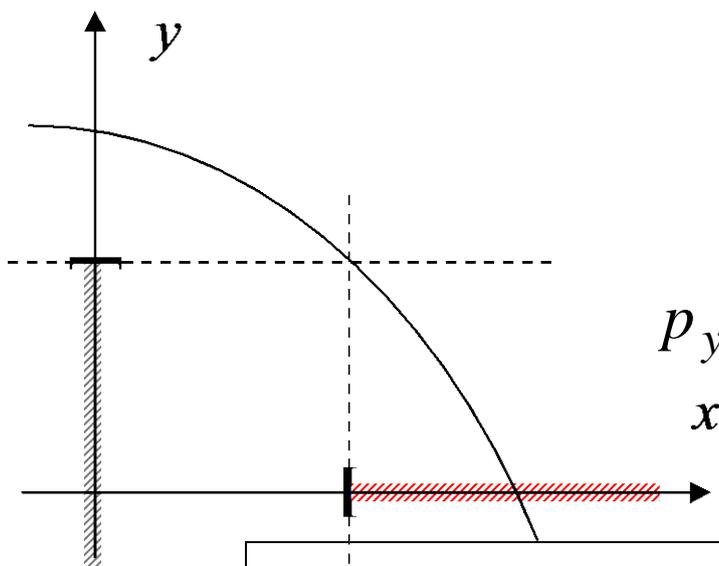
Allora la f è invertibile, con $x = g(y)$, e risulta:



$$D_y(y) = D_x(g(y))$$

$$p_y(y) = p_x(g(y)) \frac{dg(y)}{dy}$$

per $f'(x) > 0$



$$D_y(y) = 1 - D_x(g(y))$$

$$p_y(y) = p_x(g(y)) \left(-\frac{dg(y)}{dy} \right)$$

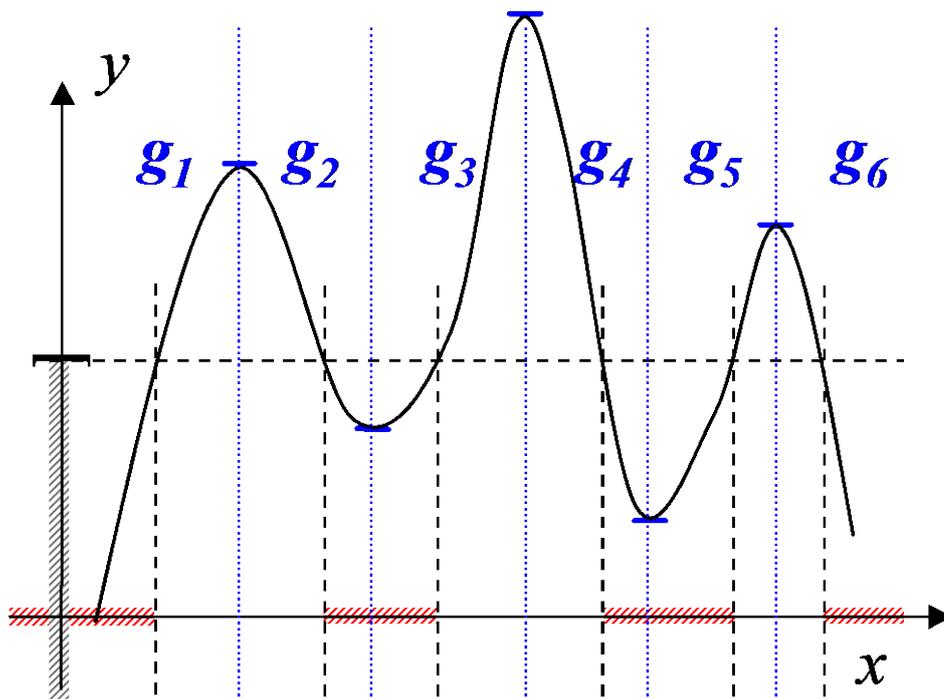
per $f'(x) < 0$ ovvero

$p_y(y) = p_x(g(y)) \left \frac{dg(y)}{dy} \right $
--

FUNZIONI MISURABILI DI V. A.: CAMBIAMENTO DI VARIABILE

➤ Sia $y = f(x)$ con $f'(x) = 0$ in un insieme di punti finito.

Allora la f è localmente invertibile, con $x = g_k(y)$, e risulta:



$$D_y(y) = D_x(g_1(y)) + D_x(g_3(y)) - D_x(g_2(y)) \\ + D_x(g_5(y)) - D_x(g_4(y)) + 1 - D_x(g_6(y))$$

ovvero

$$p_y(y) = \sum_{k=1}^n p_x(g_k(y)) \left| \frac{dg_k(y)}{dy} \right|$$

FUNZIONI MISURABILI DI V. A.:

CAMBIAMENTO DI VARIABILE

➤ Sia X una variabile aleatoria n -dimensionale continua, e sia $f:R^n \rightarrow R^m$ una funzione m -dimensionale *misurabile* della variabile aleatoria n -dimensionale X .

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

tale che

- l'immagine inversa di ogni intervallo illimitato inferiormente è misurabile secondo la misura di probabilità $D_X(x)$
- la misura di probabilità dell'immagine inversa di un intervallo illimitato inferiormente tende a 0 al tendere di almeno uno degli estremi a $-\infty$
- la misura di probabilità dell'immagine inversa di un intervallo illimitato inferiormente tende a 1 al tendere di tutti gli estremi a $+\infty$

allora

➤ $Y=f(X)$ costituisce una variabile aleatoria m -dimensionale definita sullo stesso spazio base della variabile X

FUNZIONI MISURABILI DI V. A.:

CAMBIAMENTO DI VARIABILE

➤ Sia $m=n$, e sia f invertibile, ovvero:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \dots, y_n) \\ x_2 = g_2(y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ x_m = g_m(y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

Allora sussiste la relazione

$$p_Y(y_1, \dots, y_n) = p_X(g_1(y_1), \dots, g_n(y_n)) |J(y_1, \dots, y_n)|$$

dove

$$|J(y_1, \dots, y_n)| = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial y_n} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

è il determinante dello Jacobiano della trasformazione inversa g .

- Se $m < n$, è possibile aggiungere alla trasformazione $(n-m)$ funzioni in modo da rendere la f risultante *invertibile*.
- Se $m > n$, la misura di probabilità è concentrata in un sottoinsieme di R^n di misura di Lebesgue nulla.

FUNZIONE CARATTERISTICA

➤ *Def.* Data una variabile aleatoria unidimensionale X , si definisce **funzione caratteristica** della v.a. X il valore atteso

$$P_X(\xi) = E_X \{ e^{-j2\pi\xi x} \} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) e^{-j2\pi\xi x} dx$$

ovvero la funzione caratteristica è la Trasformata di Fourier della funzione densità di probabilità, che è assolutamente sommabile.

➤ *Proprietà:* I momenti di ordine n della v.a. X sono legati alla funzione caratteristica dalla:

$$m_X^{(n)} = \frac{1}{(-j2\pi)^n} \left. \frac{d^n P_X(\xi)}{d\xi^n} \right|_{\xi=0}$$

Infatti per la proprietà della derivazione della trasformata di Fourier

$$F \{ x^n p_X(x) \} = \frac{1}{(-j2\pi)^n} \frac{d^n}{d\xi^n} P_X(\xi)$$

ed inoltre poiché il valore in zero in un dominio corrisponde all'integrale nel dominio trasformato, si ha

$$\frac{1}{(-j2\pi)^n} \left. \frac{d^n}{d\xi^n} P_X(\xi) \right|_{\xi=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p_X(x) dx.$$

GAUSSIANA N-DIMENSIONALE

➤ *Def.-* Una variabile aleatoria \underline{X} N-dimensionale si dice a distribuzione Gaussiana, o **normale**, e si indica con

$$\underline{x} \sim \mathbf{N}(\underline{m}_x, K_x)$$

se la sua funzione di densità di probabilità congiunta e' del tipo:

$$p_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det[K_x]}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m}_x)^T K_x^{-1}(\underline{x}-\underline{m}_x)}$$

in cui K_x e' una matrice (NxN) **definita positiva**.

➤ La condizione che K_x sia definita positiva, assicura l'esistenza della sua inversa K_x^{-1} e la convergenza dell'integrale della *f.d.p.*.

➤ Il vettore \underline{m}_x e la matrice K_x rappresentano rispettivamente il *valore atteso* e la *matrice di covarianza* della variabile aleatoria.

GAUSSIANA N-DIMENSIONALE

➤ Sia \underline{X} una v.a. a distribuzione normale, con $\underline{x} \sim \mathbf{N}(\underline{m}_x, K_x)$.

Allora \underline{m}_x rappresenta il *valore atteso* e K_x la *matrice di covarianza* della variabile \underline{X} .

➤ *Dim.* Per una variabile aleatoria **centrata e normalizzata** \underline{Y}_0

$$\underline{Y}_0 \sim \mathbf{N}(\underline{0}, \mathbf{I})$$

la funzione *densita' di probabilita'* $p_{\underline{Y}_0}(\underline{y}_0)$ è:

$$p_{\underline{Y}_0}(\underline{y}_0) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{1}{2} \underline{y}_0^T \underline{y}_0} = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_{0i}^2}{2}}$$

Poiché le v.a. marginali y_{0i} sono mutuamente statisticamente indipendenti con f.d.p. *gaussiana a valor atteso nullo e varianza unitaria*, il valor atteso di \underline{y}_0 è **nullo**

$$\underline{m}_{y_0} = \mathbf{E}_{y_0} \{ \underline{y}_0 \} = \underline{0}$$

e la sua matrice di covarianza è pari alla **matrice di identita' \mathbf{I}** :

$$K_{y_0} = E_{Y_0} \left\{ (\underline{y}_0 - \underline{m}_{y_0})(\underline{y}_0 - \underline{m}_{y_0})^T \right\} = \mathbf{I}$$

GAUSSIANA N-DIMENSIONALE

➤ (Valore atteso e matrice di covarianza, *segue*)

➤ Data una v.a. \underline{X} : $\underline{X} \sim \mathbf{N}(\underline{m}_x, K_x)$, essendo K_x e quindi K_x^{-1} definita positiva, essa e' legata alla variabile aleatoria $\underline{Y}_0 \sim \mathbf{N}(\underline{0}, \mathbf{I})$ tramite la trasformazione lineare:

$$\underline{Y}_0 = \mathbf{B}(\underline{x} - \underline{m}_0)$$

dove B è determinata dalla *decomposizione di Cholesky* della K_x^{-1} :

$$K_x^{-1} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$$

➤ Per le proprietà della *trasformazione lineare* si ha infatti:

$$\begin{aligned} K_{\underline{y}_0} &= \mathbf{B} K_x \mathbf{B}^T = \mathbf{B} \left(K_x^{-1} \right)^{-1} \mathbf{B}^T = \\ &= \mathbf{B} \left(\mathbf{B}^T \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{B}^T = \\ &= \mathbf{B} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{B}^{\mathbf{T}^{-1}} \mathbf{B}^T = \\ &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

PROPRIETÀ

➤ La trasformazione lineare inversa è

$$\underline{x} = \mathbf{B}^{-1} \underline{y}_0 + \underline{m}_x$$

Ricordando le proprietà delle trasformazioni lineari, si ha:

$$E_{\underline{x}} \{ \underline{x} \} = E_{\underline{Y}_0} \{ \mathbf{B}^{-1} \underline{y}_0 \} + \underline{m}_x = \underline{m}_x,$$

$$E_{\underline{x}} \{ (\underline{x} - \underline{m}_x)(\underline{x} - \underline{m}_x)^T \} = \mathbf{B}^{-1} E_{\underline{Y}_0} \{ \underline{y}_0 \underline{y}_0^T \} (\mathbf{B}^{-1})^T =$$

$$= \mathbf{B}^{-1} \mathbf{I} (\mathbf{B}^{-1})^T = (\mathbf{B}^{-1}) (\mathbf{B}^{-1})^T =$$

$$= (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{K}_x^{-1})^{-1} = \mathbf{K}_x$$

c.v.d.

PROPRIETÀ

- Una trasformazione lineare invertibile

$$\underline{y} = A\underline{x}$$

di una v.a. gaussiana e' ancora *gaussiana* con

$$\begin{cases} \underline{m}_y = A \underline{m}_x \\ K_y = AK_x A^T \end{cases}$$

- *Dim.* Per la regola del cambiamento di variabile, poiché il determinante *jacobiano* e' proprio pari a $\det[A^{-1}]$, si ha:

$$\begin{aligned} p_y(y) &= p_x(A^{-1}y) \cdot |\det[A^{-1}]| = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det[K_x] (\det[A])^2}} e^{-\frac{1}{2} (A^{-1} \underline{y} - \underline{m}_x)^T K_x^{-1} (A^{-1} \underline{y} - \underline{m}_x)} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det[K_x] (\det[A])^2}} e^{-\frac{1}{2} (\underline{y} - A \underline{m}_x)^T (A^{-1})^T K_x^{-1} A^{-1} (\underline{y} - A \underline{m}_x)} \end{aligned}$$

PROPRIETÀ

➤ (Trasformazione lineare invertibile, *segue*)

Si ponga

$$\underline{m}_y = A\underline{m}_x,$$

$$K_y = AK_x A^T.$$

Risulta:

$$K_y^{-1} = (AK_x A^T)^{-1} = (A^{-1})^T K_x^{-1} A^{-1}$$

$$\det[K_y] = \det[K_x] \cdot (\det[A])^2$$

da cui

$$p_{\underline{y}}(\underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det[K_y]}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{y}-\underline{m}_y)^T K_y^{-1}(\underline{y}-\underline{m}_y)}$$

c.v.d.

DECOMPOSIZIONE DI CHOLESKY

➤ *Teorema:*

Data una matrice A definita **non negativa**, esiste ed è unica una matrice B triangolare in basso con elementi positivi o nulli sulla diagonale principale tale che:

$$A = B^T B$$

○ *Commento:* questa trasformazione ha la proprietà di trasformare una variabile aleatoria gaussiana \underline{X} con valore atteso \underline{m}_x e matrice di covarianza K_x in una variabile aleatoria **gaussiana** con componenti centrate, normalizzate ed incorrelate.

◆ Per tale motivo l'operatore B è noto in letteratura con il termine di **filtro o matrice sbiancante**.

PROPRIETÀ

➤ *Teorema:* Variabili aleatorie congiuntamente gaussiane incorrelate risultano anche **statisticamente indipendenti**.

➤ *Dimostrazione:* Se le v. a. marginali sono incorrelate la matrice di covarianza $K_{\underline{x}}$, conseguentemente anche la sua inversa $K_{\underline{x}}^{-1}$, è diagonale:

$$K_{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_{x_N}^2 \end{bmatrix}, K_{\underline{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{x_1}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/\sigma_{x_N}^2 \end{bmatrix}$$

La f.d.p. congiunta si riduce a

$$p_{\underline{X}}(\underline{x}) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{x_i}} e^{-\frac{(x_i - m_{x_i})^2}{2\sigma_{x_i}^2}}$$

c.v.d.

IPERELLISOIDE DI CONCENTRAZIONE

- Il luogo dei punti dello spazio per cui la **densita' di probabilita'** risulta **costante**

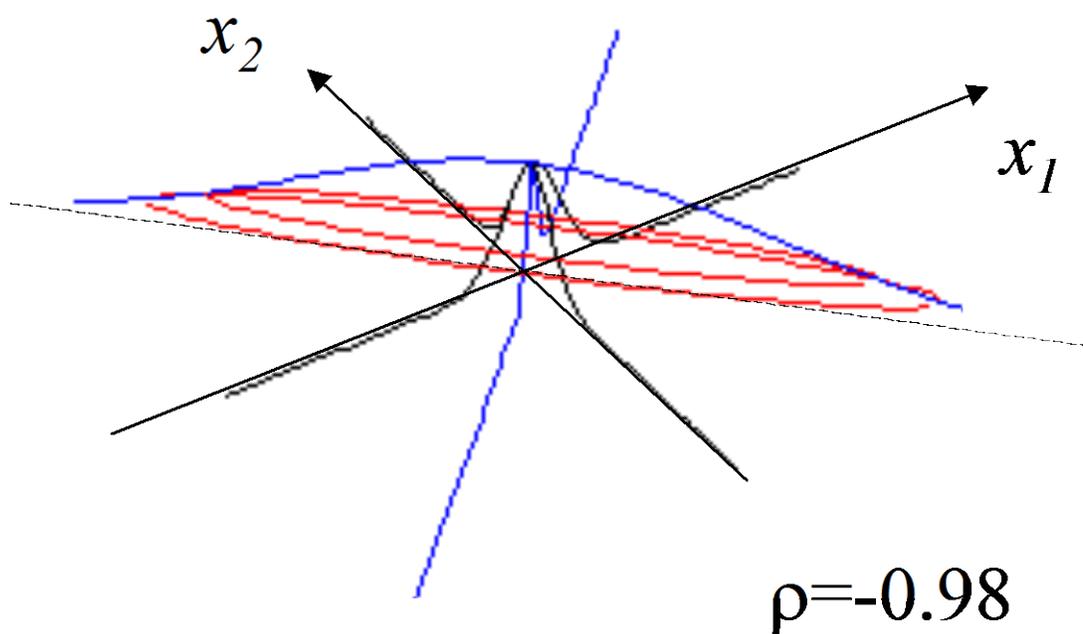
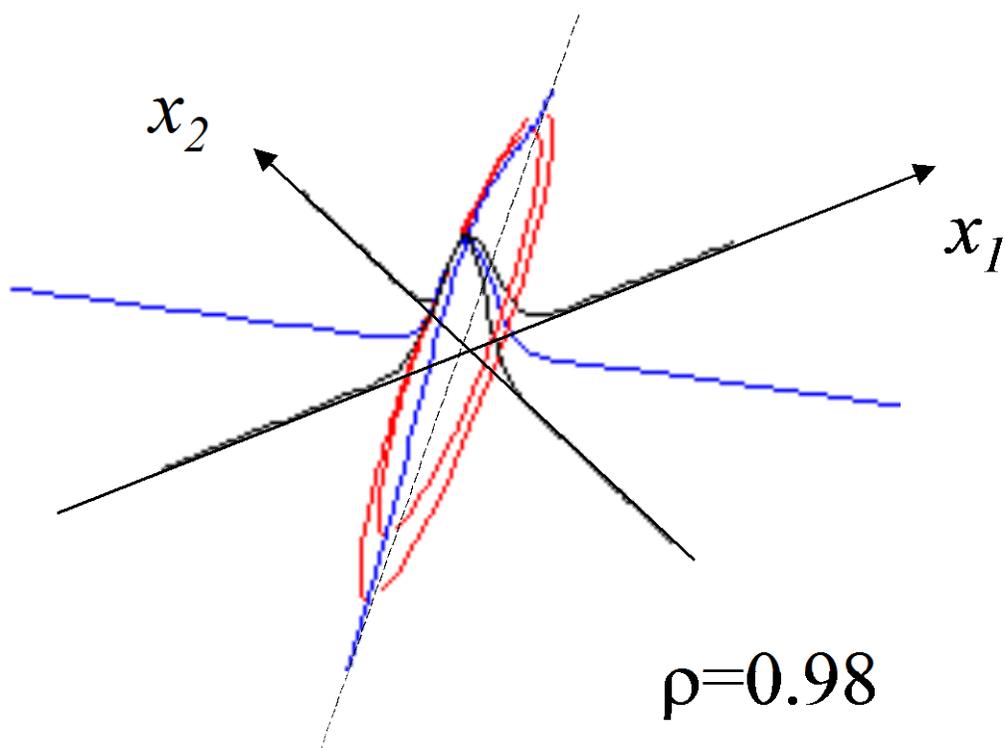
$$p_{\underline{x}}(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det[K_x]}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{x}-\underline{m}_x)^T K_x^{-1}(\underline{x}-\underline{m}_x)}$$

e' costituito dai punti per i quali risulta costante l'esponente della *p.d.f.* :

$$(\underline{x} - \underline{m}_x)^T K_x^{-1} (\underline{x} - \underline{m}_x) = c' > 0$$

- Nello spazio R^n il luogo dei punti per cui la densita' di probabilita' è costante è un Iperellissoide. Esso prende il nome di Iperellissoide di concentrazione.

IPERELLISSOIDE DI CONCENTRAZIONE



IPERELLISSOIDE DI CONCENTRAZIONE

- *Commento:* tale equazione rappresenta un iperellissoide con centro nel punto \underline{m}_x i cui *semiassi principali sono proporzionali alla radice quadrata degli autovalori della matrice K_x* (che coincidono con gli inversi degli autovalori della matrice di covarianza K_x^{-1}).
- La matrice di covarianza determina la grandezza e l'orientamento di tali iperellissoidi che sono noti come "iperellissoidi di concentrazione".
- Se le variabili aleatorie marginali sono incorrelate, K_x e' diagonale e quindi gli assi principali degli iperellissoidi sono paralleli agli assi coordinati ed i semiassi sono proporzionali ai valori $\sigma_i = \sqrt{K_{ij}}$

GAUSSIANA BIDIMENSIONALE

Sia $\underline{Z} = (X, Y)$ una variabile aleatoria bidimensionale a distribuzione Gaussiana, o **normale**.

La sua funzione di densità di probabilità è

$$p_{\underline{Z}}(\underline{z}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\det[K_z]}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{z}-\underline{m}_z)^T K_z^{-1}(\underline{z}-\underline{m}_z)}$$

con

$$\underline{m}_z = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix}$$

$$K_z = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y \\ \rho_{xy} \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{aligned} m_x &= E\{x\}, & \sigma_x^2 &= E\{(x - m_x)^2\} \\ m_y &= E\{y\}, & \sigma_y^2 &= E\{(y - m_y)^2\} \\ \rho_{xy} &= \frac{E\{(x - m_x)(y - m_y)\}}{\sigma_x \sigma_{yx}} \end{aligned}$$

GAUSSIANA BIDIMENSIONALE

La funzione di densità di probabilità può scriversi più esplicitamente

$$p_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{(1-\rho_{xy}^2)}} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_y^2} - 2\rho_{xy} \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_x^2} \right] \right\}$$

La funzione caratteristica è

$$P_{XY}(\xi, \eta) = \exp\{-j2\pi(\xi m_x + \eta m_y)\} \cdot \exp\{-2\pi^2(\sigma_x^2\xi^2 + 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y\xi\eta + \sigma_y^2\eta^2)\}$$

ELLISSI DI CONCENTRAZIONE

➤ *Equazione dell'ellisse di concentrazione:*

$$\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_y^2} - 2\rho_{xy} \frac{(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_x^2} = c'$$

➤ *Proprietà*

○ Centro nel punto m_x, m_y

○ Assi principali rispettivamente ruotati di α e $\alpha + \frac{\pi}{2}$, con

$$\operatorname{tg}\{2\alpha\} = \frac{2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2}$$

○ Lunghezze dei semiassi proporzionali alla radice quadrata degli autovalori della matrice K_x

➤ Variabili aleatorie marginali di uguale varianza $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma^2$:

$$(x - m_x)^2 - 2\rho_{xy}(x - m_x)(y - m_y) + (y - m_y)^2 = c'$$

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DI SEQUENZE DI VARIABILI ALEATORIE

- Sia X_1, X_2, \dots, X_n una *sequenza* di variabili aleatorie n -dimensionali definite su uno spazio base Ω .
- Per una determinata sequenza di risultati $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \Omega$, ovvero per un fissato risultato $\zeta \in \Omega^n$, la sequenza $X_1(\zeta), X_2(\zeta), \dots, X_n(\zeta)$ può eventualmente “convergere” ad una costante c secondo uno dei criteri seguenti.

Convergenza ovunque (il limite è verificato per *tutte* le sequenze X_n):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\zeta) = c \quad \forall \zeta \in \Omega^n$$

Convergenza quasi ovunque (o *con probabilità 1*) (il limite è verificato per *tutte* le sequenze X_n a meno di un insieme di *Pr. nulla*):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\zeta) = c \quad \text{con Pr. 1}$$

ovvero $\Pr \left\{ \zeta \in \Omega^n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\zeta) = c \right\} = 1$

Convergenza in probabilità (il limite opera sulla *probabilità*, nulla può dirsi sul comportamento asintotico della singola sequenza X_n : per ogni $n > n_0$, con n_0 suff. grande, solo *una piccola percentuale delle sequenze X_n si discosta da c per più di γ*):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left\{ |X_n(\zeta) - c| < \gamma \right\} = 1$$

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DI SEQUENZE DI VARIABILI ALEATORIE

➤ Sia

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

una *sequenza* di variabili aleatorie n -dimensionali definite su uno spazio base Ω .

➤ Per una determinata sequenza di risultati $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n \in \Omega$, ovvero per un fissato risultato $\zeta \in \Omega^n$, la sequenza

$$X_1(\zeta), X_2(\zeta), \dots, X_n(\zeta)$$

può o meno “convergere” ad una variabile aleatoria X .

➤ In particolare si definisce

Convergenza in distribuzione:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{X_n}(x_n) = D_X(x)$$

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

➤ La **somma** di n variabili aleatorie *indipendenti, identicamente distribuite* di valore medio m_x , e varianza σ_x^2 è asintoticamente **normale**, ovvero la variabile aleatoria:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_x)}{\sqrt{n\sigma_x^2} / \sigma_y}$$

converge in distribuzione ad una variabile aleatoria gaussiana di valor medio nullo e varianza σ_y^2 .

○ *Commento:* Il teorema del limite centrale (CLT) è di grande importanza applicativa, perché suggerisce una descrizione, ancorché asintotica, di variabili aleatorie risultanti dalla sovrapposizione di un elevato numero di contributi elementari statisticamente indipendenti.

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE (SEGUE)

➤ *Dim.* Per la somma di n variabili aleatorie indipendenti centrate e normalizzate vale la relazione seguente

$$\begin{aligned}
 p_Y(y) &= \mathbf{F}^{-1} \{P_Y(\xi)\} = \mathbf{F}^{-1} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} [P_X(\xi)]^n \right\} \\
 &= \mathbf{F}^{-1} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[P_X(0) + \dot{P}_X(0)\xi + \ddot{P}_X(0)\frac{\xi^2}{2} + o(\xi^2) \right]^n \right\}
 \end{aligned}$$

dove $P_X^{(k)}(0) = (-j2\pi)^k m_X^{(k)}$,

con

$$m_X^{(1)} = 0,$$

$$m_X^{(2)} = \sigma_x^2 / \left(n \sigma_x^2 / \sigma_y^2 \right) = \sigma_y^2 / n.$$

Risulta quindi

$$\begin{aligned}
 p_Y(y) &= \mathbf{F}^{-1} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - (2\pi)^2 \frac{\sigma_y^2}{n} \frac{\xi^2}{2} + o(\xi^2) \right]^n \right\} \\
 &= \mathbf{F}^{-1} \left\{ e^{-2\pi^2 \sigma_y^2 \xi^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_y^2}}
 \end{aligned}$$

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DI SEQUENZE DI VARIABILI ALEATORIE

➤ L'approccio assiomatico della teoria della probabilità pone il problema della *misura sperimentale della probabilità di un evento aleatorio*. In particolare, la probabilità di un evento calcolata in base alla teoria assiomatica deve trovare riscontro nella probabilità di un evento definita nell'approccio frequentistico.

➤ *Legge debole dei grandi numeri (Teorema di Bernoulli)*

Sia dato un fenomeno aleatorio F ed un evento ammissibile E , di misura di probabilità P_E . La frequenza di ricorrenza n_E/n di E in n prove *indipendenti converge in probabilità* a P_E

➤ *Legge forte dei grandi numeri (Teorema di Borel)*

Sia dato un fenomeno aleatorio F ed un evento ammissibile E , di misura di probabilità P_E . La frequenza di ricorrenza $f_E = n_E/n$ di E in n prove *indipendenti converge con probabilità 1* a P_E

LEGGE DEBOLE DEI GRANDI NUMERI

➤ *Dim.* Sia dato un fenomeno aleatorio F ed un evento ammissibile E , di misura di probabilità P_E . Si consideri la variabile aleatoria binaria X_i la cui determinazione vale 1 se nella i -esima prova l'evento si verifica e 0 altrimenti.

La frequenza di ricorrenza $f_E = n_E/n$ di E in n prove *indipendenti* è esprimibile come

$$f_E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} b_n$$

essendo B_n una v.a. di Bernoulli con parametri n e P_E . Pertanto

$$P_{F_E} [f_E] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_E^k (1 - P_E)^{n-k} u_0 \left[f_E - \frac{k}{n} \right]$$

Inoltre

- $m_{F_E} = m_B / n = (nP_E) / n = P_E$
- $\sigma_{F_E}^2 = \sigma_B^2 / n^2 = [nP_E(1 - P_E)] / n^2 = P_E(1 - P_E) / n$

quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{F_E}^2 = 0$$

Inoltre, la probabilità che per $n > n_0$, f_E si discosti da P_E per più di un quantità assegnata può essere resa arbitrariamente piccola prendendo n_0 opportuno.

PROCESSI STAZIONARI

➤ *Def.* Un processo aleatorio si dice **stazionario in senso stretto** se le sue proprietà statistiche sono invarianti rispetto a una traslazione temporale.

➤ Fissati n intervalli di tempo $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ la f.d.p. congiunta

$$P_{x_1, x_2, \dots, x_n} (x_1, x_2, \dots, x_n; t_0 + \Delta t_1, t_0 + \Delta t_2, \dots, t_0 + \Delta t_n)$$

relativa alle v.a. x_i estratte negli istanti di tempo $t_i = t_0 + \Delta t_i$ non dipende da t_0 , ma solo dalla allocazione relativa degli istanti di tempo t_1, t_2, \dots, t_n , completamente individuata dai Δt_i con $i > 0$.

In alternativa agli intervalli Δt_i e' usuale nella letteratura

considerare gli intervalli $\tau_i = t_{i+1} - t_i$.

PROCESSI STAZIONARI - PROPRIETÀ

- **La gerarchia del primo ordine non dipende dall'istante di tempo considerato:**

$$p_{x_1}(x_1; t_1) = p_{x_1}(x_1) \quad \forall t_1 \in T;$$

m Le medie d'insieme di ordine k sono indipendenti da tempo. In particolare si ha:

$$m_x(t_1) = m_x$$

$$m_x^{(2)}(t_1) = m_x^{(2)}$$

- **La gerarchia del secondo ordine dipende solo dalla differenza**

$\tau = t_2 - t_1$ **tra gli istanti di tempo considerati:**

$$p_{x_1 x_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_{x_1 x_2}(x_1, x_2; \tau) \quad \forall t_1, t_2 \in T;$$

m Le medie d'insieme del secondo ordine non dipendono che dalla differenza $\tau = t_2 - t_1$ tra gli istanti di tempo considerati. In particolare si ha:

$$m_x^{(1,1)}(\tau) = \int \int_{x_1 x_2} x_1 x_2 p_{x_1 x_2}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$$

$$k_x(\tau) = \int \int_{x_1 x_2} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) p_{x_1 x_2}(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$$

PROCESSI STAZIONARI - PROCESSO ARMONICO

➤ Per illustrare i concetti precedenti consideriamo il **processo armonico**:

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

dove a e' una costante nota, e φ_0 una determinazione di una variabile aleatoria.

➤ *Teorema 1.* Il processo armonico $\{a \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)\}$ risulta stazionario in senso stretto se e solo se la v.a. ϕ_0 e' uniformemente distribuita nell' intervallo $[0, 2\pi)$.

➤ *Dim.* Allo scopo di individuare per quale tipo di distribuzioni di ϕ_0 tale processo risulti stazionario deriviamo la gerarchia di ordine 1 del processo.

PROCESSI STAZIONARI

➤ La f.d.p. $p_{x_1}(x_1; t_1)$ puo' essere calcolata a partire da quella di ϕ_0 osservando che, fissato t_1 , ad una determinazione di X_1 corrispondono due valori di ϕ_0 dati da

$$\phi_0 = -2\pi f_0 t_1 \pm \arccos\left(\frac{x_1}{a}\right) \quad \text{mod. } 2\pi$$

➤ Applicando la regola per le funzioni di v.a. e osservando che per ambedue le funzioni inverse si ha :

$$\left| \frac{d\phi_0}{dx_1} \right| = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \quad \forall x_1 \in [-a, a] \text{ segue che:}$$

$$p_{x_1}(x_1; t_1) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \left\{ p_{\phi_0} \left[\left(-2\pi f_0 t_1 + \arccos\left(\frac{x_1}{a}\right) \right)_{\text{mod. } 2\pi} \right] + \right. \\ \left. + p_{\phi_0} \left[\left(-2\pi f_0 t_1 - \arccos\left(\frac{x_1}{a}\right) \right)_{\text{mod. } 2\pi} \right] \right\} \quad x_1 \in [-a, a]$$

PROCESSI STAZIONARI

➤ Dalla precedente relazione si ha immediatamente che affinché $p_{x_1}(x_1; t_1)$ non dipenda da t_1 la $p_{\phi_0}(\phi_0)$ deve risultare costante su tutto l'intervallo $[0, 2\pi)$ ovvero la v.a. ϕ_0 deve risultare a distribuzione uniforme su tale intervallo, ottenendo

$$p_{x_1}(x_1) = \begin{cases} 0 & x_1 < -a \quad o \quad x_1 > a \\ \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x_1^2}} & -a \leq x_1 \leq a \end{cases}$$

(condizione necessaria)

PROCESSI STAZIONARI

➤ Per dimostrare la sufficienza occorre considerare le gerarchie di ordine n , con n qualsiasi. Si osservi che

➤ Per $n=2$

$$\begin{aligned}x_2 = x(t_2) &= a \cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi_0) = \\ &= a \cos[(2\pi f_0 t_1 + \varphi_0) + 2\pi f_0 \tau] = \\ &= x_1 \cos(2\pi f_0 \tau) \mp \sqrt{a^2 - x_1^2} \sin(2\pi f_0 \tau)\end{aligned}$$

e quindi la f.d.p. condizionata $p_{x_2|x_1}(x_2/x_1; t_1, t_2)$ dipende solo da τ

e di conseguenza la f.d.p. congiunta

$$p_{x_1 x_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_{x_2|x_1}(x_2/x_1; \tau) p_{x_1}(x_1)$$

dipende solo da τ .

➤ Per $n>2$ inoltre le v.a. x_3, x_4, \dots, x_n sono legate in modo

biunivoco a x_1 e x_2 una volta fissati $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$.

PROCESSI STAZIONARI

➤ In effetti essendo il processo deterministico, si può procedere in alternativa come segue. Considerando una traslazione arbitraria Δt si ha:

$$\begin{aligned}x(t_1 + \Delta t) &= a \cos(2\pi f_0 t_1 + 2\pi f_0 \Delta t + \varphi_0) = \\ &= a \cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi_0')\end{aligned}$$

con
$$\varphi_0' = \varphi_0 + 2\pi f_0 \Delta t \pmod{2\pi}$$

pertanto il processo può essere pensato come dipendente dalla nuova v.a. ϕ_0' .

➤ Affinché le sue proprietà statistiche risultino inalterate rispetto ad una traslazione arbitraria, le due variabili aleatorie ϕ_0 e ϕ_0' devono avere la stessa f.d.p., ma poiché si ha:

$$p_{\phi_0'}(\phi_0') = p_{\phi_0}[(\phi_0' - 2\pi \Delta t)_{\text{mod}.2\pi}]$$

ed inoltre l'eguaglianza deve valere per ogni Δt , ne consegue che tali condizioni sono verificate se e solo se $p_{\phi_0}(\varphi_0)$ risulta essere costante in $[0, 2\pi)$.

PROCESSI STAZIONARI

➤ Poiche' la proprieta' di stazionarieta' in senso stretto risulta molto restrittiva nonche' difficile da verificare, e' utile introdurre una seconda forma di stazionarieta' piu' debole della precedente.

➤ *Def.* Un processo aleatorio $X(t; \omega)$ si dice **stazionario in senso lato** se:

a) $m_x^{(2)}(t_1) < +\infty$

b) il valore atteso e' indipendente dal tempo

$$m_x(t_1) = m_x = \cos t.$$

c) la funzione di covarianza dipende solo dall'intervallo $\tau = t_2 - t_1$:

$$k_x(t_1, t_2) = k_x(t_2 - t_1) = k_x(\tau)$$

➤ Ovviamente un processo aleatorio stazionario in senso stretto lo e' anche in senso lato mentre in generale non e' vero il viceversa.

PROCESSI ERGODICI

- *Obiettivo:* derivare su base sperimentale le proprietà statistiche di un processo aleatorio, definito come famiglia di variabili aleatorie indicizzate da un parametro.

- In generale, occorre fare ricorso ad *un numero sufficientemente elevato di realizzazioni* ottenute da sorgenti di costituzione e condizioni di funzionamento identiche.

- Esistono classi di processi, detti **ergodici**, per cui tali informazioni possano essere dedotte a partire da **una singola realizzazione** del processo, perché *le medie temporali e le medie d'insieme coincidono*. In altre parole, i processi ergodici presentano regolarità di comportamento analoghe a quelle descritte dalla legge forte dei grandi numeri.

PROCESSI ERGODICI

➤ Dato un fenomeno aleatorio ed un evento ammissibile E con probabilità $\Pr \{E\}$, la *legge forte dei grandi numeri* assicura che, in N prove totali, **statisticamente indipendenti**, l'evento E occorre N_E volte, con frequenza di ricorrenza N_E/N che tende, al crescere di N , alla probabilità dell'evento $\Pr \{E\}$, a meno di un insieme di esperimenti di misura nulla.

➤ Dato un processo aleatorio, le variabili aleatorie estratte nei singoli istanti di tempo non sono, in generale, statisticamente indipendenti. Sotto quali condizioni vale la legge forte dei grandi numeri, ovvero *l'occorrenza di un evento nel corso di un'intera realizzazione è rappresentativa della probabilità dell'evento stesso?*

➤ In effetti, come mostrato in [Doob, 1954, pagg. 465 e seg.] affinché la legge dei grandi numeri possa essere applicata occorre che preso l'insieme di tutte le realizzazioni del processo, non appena si toglie da tale insieme un sottoinsieme di realizzazioni di misura di probabilità non nulla (e ovviamente diversa da 1) il processo che così ottenuto non sia stazionario.

PROCESSI ERGODICI

➤ *Def:* Un processo si dice ergodico se *la media temporale di ordine n di una funzione di una realizzazione è uguale per tutte le realizzazioni (a meno di un sottoinsieme di probabilità nulla) e coincide con la media d'insieme della stessa funzione.*

➤ *CNES* Un processo è **ergodico** sse:

- è stazionario in senso stretto
- non contiene sottoinsiemi stazionari in senso stretto con probabilità diversa da 0 o 1.

○ *Commento:*

In essenza il teorema implica che ogni realizzazione di un processo ergodico contiene in sé tutta l'informazione possibile sul processo, in quanto *una sorgente ergodica produce, nel corso di una realizzazione, tutte le situazioni ed i casi possibili per il processo con una frequenza pari alla probabilità di detti eventi.*

Prese M sorgenti aleatorie identiche, all'interno di ogni realizzazione si troveranno, ovviamente con istanti di presentazione differenti, tutti i casi possibili.

PROCESSI ERGODICI

Sia $f(x_1, \dots, x_n)$ una *funzione delle variabili aleatorie* X_1, \dots, X_n relative agli istanti t_1, \dots, t_n . La media di insieme della funzione è data da

$$E\{f(x_1, x_2, \dots, x_n)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

Per una generica realizzazione del processo, ha senso considerare la $f(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)) = f(x(t_1), x(t_1 + \tau_1), \dots, x(t_1 + \tau_{n-1}))$ come *funzione delle distanze temporali* $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. In tal senso, la media temporale della funzione è data da

$$\overline{f(x(t_1), x(t_1 + \tau_1), \dots, x(t_1 + \tau_{n-1}))}^t = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} f(x(t_1), x(t_1 + \tau_1), \dots, x(t_1 + \tau_{n-1})) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

Per un processo ergodico, la media temporale, calcolata su una singola realizzazione, coincide con la media di insieme

PROCESSI ERGODICI

➤ *Esempio:* Processo armonico $X(t; \omega)$

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$$

➤ Sia a una costante nota, e φ_0 una determinazione di una variabile aleatoria Φ_0 a distribuzione uniforme. Tale processo e' ergodico.

➤ *Dim.* Il processo e' stazionario in senso stretto. Inoltre, si consideri il *sottoinsieme* delle realizzazioni per cui $\varphi_0 \in [b, c) \subset [0, 2\pi)$.

Ad esso compete una misura di probabilita' pari a:

$$\int_b^c p_{\Phi_0}(\varphi_0) d\varphi = \frac{c-b}{2\pi}$$

Tale sottoinsieme di realizzazioni non è stazionario in senso stretto.

Infatti la v.a. Φ'_0 presenta una f.d.p. uniforme e diversa da zero in $[b, c)$, che, a seguito di una traslazione temporale Δt , si modifica in

$$p_{\Phi'_0}(\varphi'_0) = p_{\Phi_0} \left[(\varphi'_0 - 2\pi\Delta t)_{\text{mod}.2\pi} \right] \text{ che è diversa da}$$

zero in $[b+2\pi\Delta t, c+2\pi\Delta t)$. Conseguentemente il processo e' ergodico.

PROCESSI ERGODICI

➤ Sia a la determinazione di una variabile aleatoria A , e φ_0 una determinazione di una variabile aleatoria Φ_0 a distribuzione uniforme. Il processo non è ergodico.

➤ *Dim.* Il processo dipende dalla coppia di parametri aleatori (A, Φ_0) . Ogni sottoinsieme di realizzazioni per cui $a \in [a_1, a_2]$ e $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ risulta stazionario in senso stretto. Infatti la f.d.p. congiunta ad esso relativa può essere posta nella forma

$$\begin{aligned} p_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= p_{X_1, X_2, \dots, X_n/A}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n/A) p_a(A) \end{aligned}$$

Poiché per $a \in [a_1, a_2]$ il relativo sottoinsieme ha una misura di probabilità pari a

$$\int_{a_1}^{a_2} dD_A(a)$$

in generale diversa da 0 e 1; tale processo non è ergodico.

PROCESSI ERGODICI

➤ Teorema di *Wiener-Khintchine*

In un processo ergodico, lo *spettro di densità di potenza* è uguale per tutte le realizzazioni ed è pari alla Trasformata di Fourier del momento misto di ordine 1, 1 del processo stesso:

$$\mathbf{P}_x(f) = \mathbf{F} \left\{ m_x^{(1,1)}(\tau) \right\}$$

➤ *Dim.* Per il Teorema di Wiener, applicato alla singola realizzazione del processo, si ha $\mathbf{P}_x(f) = \mathbf{F} \left\{ R_x(\tau) \right\}$. D'altra parte, essendo il processo ergodico, la funzione di autocorrelazione

$$p_x(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} x(t)x(t+\tau)dt$$

coincide con il momento misto di ordine 1,1 del processo

$$m_x^{(1,1)}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p_{X_1, X_2}(x_1, x_2; t_1, t_1 + \tau) dx_1 dx_2$$

c.v.d.

PROCESSI ERGODICI

Ogni processo *stazionario* o è *ergodico*, o è *riducibile*, ovvero l'insieme delle realizzazioni del processo può essere suddiviso in un numero λ di sottoinsiemi (con λ finito, infinito numerabile o infinito non numerabile), ciascuno dei quali, pur presentando caratteristiche statistiche diverse, è ergodico.

○ La sorgente che genera il segnale aleatorio che costituisce la singola realizzazione del processo può pensarsi decomposta in λ sorgenti ergodiche. Il meccanismo aleatorio di generazione può idealmente suddividersi in due fasi:

- l'estrazione della sorgente i -esima con probabilità p_i
- la generazione della realizzazione da parte della sorgente i -esima

PROCESSI GAUSSIANI

Processi Gaussiani: processi per cui la variabile aleatoria n -dimensionale (X_1, \dots, X_n) estratta nei generici istanti (t_1, \dots, t_n) realizzazione è a distribuzione gaussiana (n -dimensionale):

$$p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\exp\left\{\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{m}_x)^T K_{\underline{X}}^{-1}(\underline{x} - \underline{m}_x)\right\}}{(2\pi)^{n/2} \det[K_{\underline{X}}]^{1/2}}$$

Il generico elemento K_{ij} della matrice di covarianza $K_{\underline{X}}$ è completamente individuata dalla *Funzione di covarianza*:

$$K_x(t_i, t_j) = E\{(x(t_i) - m_{x_i})(x(t_j) - m_{x_j})\}$$

che nel caso stazionario diviene

$$K_x(\tau) = E\{(x(t) - m_x)(x(t + \tau) - m_x)\}$$

PROCESSI GAUSSIANI

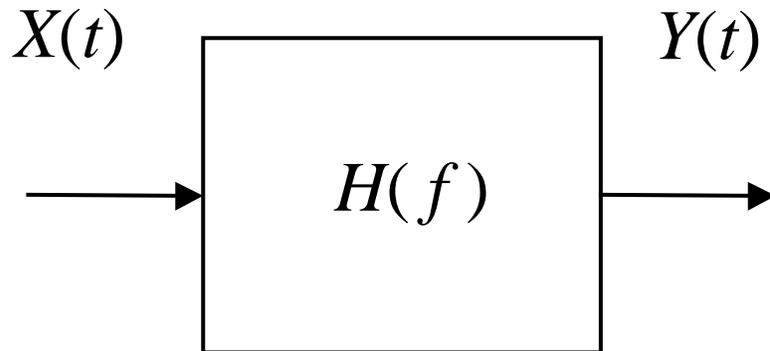
m *Commento:* Due processi Gaussiani che abbiano lo stesso valor medio e la stessa funzione di covarianza sono caratterizzati dalle stesse gerarchie di ordine n .

➤ *C.N.E.S di Ergodicità:*

Condizione necessaria e sufficiente affinché un processo Gaussiano stazionario sia ergodico è che *la funzione di covarianza sia assolutamente sommabile:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K_X(\tau)| d\tau < +\infty$$

PROCESSI GAUSSIANI



- Sia $X(t)$ un processo gaussiano in ingresso ad un filtro con funzione di trasferimento $H(f)$. Il processo di uscita $Y(t)$ è ancora *Gaussiano*.
- Il processo è completamente caratterizzato dalle relazioni (di validità generale)

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m_X(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$K_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_X(\tau_1, \tau_2) h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2$$

che, come noto, nel caso stazionario si particolarizzano in

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) d\tau$$

$$K_Y(\tau) = K_X(\tau) * \mathbf{E}_{hh}(\tau)$$

PROCESSI GAUSSIANI

Processi Gaussiani ergodici limitati in banda con banda non contigua all'origine.

➤ *Def.* Si definisce **processo ergodico limitato in banda** con occupazione di banda $2W$ centrata intorno a f_0 , un *processo* la cui *generica realizzazione* non venga alterata nel transito attraverso un filtro passa-banda ideale, con funzione di trasferimento

$$H(f) = \begin{cases} 1 & f_0 - w \leq f \leq f_0 + w \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

➤ Si consideri un processo Gaussiano $X(t)$ *ergodico*, a *valore atteso nullo*, *limitato in banda* con banda $2w$ centrata intorno a f_0 .

➤ Il processo $\hat{X}(t)$ ottenuto dal transito attraverso il filtro di Hilbert:

$$h_H(t) = 1/\pi t, \quad H_H(f) = -j \operatorname{sign}(f)$$

è ancora Gaussiano, ergodico, a *valor medio nullo*, con *funzione di covarianza*:

$$K_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = K_{xx}(\tau)$$

PROCESSI GAUSSIANI

Processi Gaussiani ergodici limitati in banda con banda non contigua all'origine (segue).

Dim. Essendo il processo $X(t)$ ergodico a valor medio nullo, valgono le regole del transito:

$$\begin{aligned} K_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) &= p_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) - m_{\hat{x}}^2 = p_{\hat{x}\hat{x}}(\tau) = p_{xx}(\tau) * \mathbf{E}_{h_H h_H}(\tau) \\ &= p_{xx}(\tau) * u_0(\tau) = p_{xx}(\tau) = p_{xx}(\tau) - m_x^2 = K_{xx}(\tau) \end{aligned}$$

(in frequenza $P_{\hat{x}\hat{x}}(f) = P_{xx}(f) |H_H(f)|^2 = P_{xx}(f)$).

m Commento:

I processi $X(t)$, $\hat{X}(t)$ avendo la stessa funzione di covarianza, hanno le stesse gerarchie di ordine n .

m Commento:

Le variabili aleatorie $x(t)$, $\hat{x}(t)$ (estratte nello stesso istante t) sono ortogonali:

$$p_{x\hat{x}}(0) = p_{xx}(\tau) * h_H(\tau) \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{xx}(\xi) \frac{1}{\pi\xi} d\xi = 0$$

poiché $p_{xx}(\tau)$ è una funzione pari e $h_H(\tau)$ una funzione dispari di τ . Essendo Gaussiane, esse sono **anche** statisticamente indipendenti.

PROCESSI GAUSSIANI

Processi Gaussiani ergodici limitati in banda con banda non contigua all'origine (segue).

➤ La singola realizzazione del processo può essere rappresentata in termini delle sue componenti analogiche di bassa frequenza come

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

➤ Per ogni istante t , le variabili aleatorie $x_c(t)$, $x_s(t)$ estratte sono legate alle variabili aleatorie $x(t)$, $\hat{x}(t)$ dalla trasformazione lineare:

$$\begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_s(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi f_0 t) & \sin(2\pi f_0 t) \\ -\sin(2\pi f_0 t) & \cos(2\pi f_0 t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

In particolare, le variabili aleatorie $x_c(t)$, $x_s(t)$ estratte nello stesso istante t sono ancora congiuntamente Gaussiane, a valor medio nullo, incorrelate, e varianza $\sigma_{x_c}^2 = \sigma_{x_s}^2 = \sigma_x^2$.

$$\begin{bmatrix} m_{x_c} \\ m_{x_s} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} m_x \\ m_{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_c}^2 & \sigma_{x_c x_s} \\ \sigma_{x_c x_s} & \sigma_{x_s}^2 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \cdot A^T = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_x^2 \end{bmatrix}$$

PROCESSI GAUSSIANI

Processi Gaussiani ergodici limitati in banda con banda non contigua all'origine (segue).

➤ E' possibile dimostrare che le famiglie delle componenti analogiche di bassa frequenza (delle realizzazioni di) un processo Gaussiano sono due processi $X_c(t)$ e $X_s(t)$, congiuntamente Gaussiani, ergodici, a valore atteso nullo e funzione di covarianza

$$K_{X_c X_c}(\tau) = K_{X_s X_s}(\tau) = K_{XX}^{(C)}(\tau)$$

$$K_{X_c X_s}(\tau) = -K_{X_s X_c}(\tau) = K_{XX}^{(S)}(\tau)$$

dove $K_{XX}^{(C)}(\tau)$ e $K_{XX}^{(S)}(\tau)$ sono le componenti analogiche di bassa frequenza della funzione di covarianza $K_{XX}(\tau)$:

$$K_{XX}(\tau) = K_{XX}^{(C)}(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) - K_{XX}^{(S)}(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

○ *Commento:* si noti che la funzione di autocorrelazione di un processo ergodico limitato in banda è limitata in banda (infatti la sua Trasformata di Fourier, che costituisce lo spettro di densità di potenza di una realizzazione tipica, non è alterata da un filtro passabanda).

PROCESSI GAUSSIANI: INVILUPPO E FASE

Processi Gaussiani ergodici limitati in banda con banda non contigua all'origine (segue).

➤ Si consideri un processo Gaussiano $X(t)$ *ergodico*, a valore atteso nullo, limitato in banda con banda $2w$ centrata intorno a f_0 :

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

➤ Si definiscono inviluppo $v(t)$ e fase $\varphi(t)$ rispetto alla frequenza f_0

$$v(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}$$

$$\varphi(t) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_s(t)}{x_c(t)}$$

➤ La singola realizzazione ammette la seguente rappresentazione:

$$x(t) = v(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

PROCESSI GAUSSIANI: INVILUPPO E FASE

- Le Gerarchie di ordine 1 dell'inviluppo $v(t)$ e della fase $\varphi(t)$ di un processo Gaussiano sono date rispettivamente dalla densità di probabilità di Raileigh

$$p_V(v) = \begin{cases} \frac{v}{\sigma^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} & v \geq 0 \\ 0 & v < 0 \end{cases}$$

e dalla densità di probabilità uniforme

$$p_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

PROCESSI GAUSSIANI: INVILUPPO E FASE

➤ *Dim.* Le variabili v_1 , φ_1 sono legate alle x_{c1} , x_{s1} dalla trasformazione

$$v_1 = \sqrt{x_{c1}^2 + x_{s1}^2}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_{s1}}{x_{c1}}$$

la cui inversa

$$x_{c1} = v_1 \cos(\varphi_1)$$

$$x_{s1} = v_1 \operatorname{sen}(\varphi_1)$$

ha per Jacobiano

$$\begin{aligned} J(v_1, \varphi_1) &= \begin{bmatrix} \partial x_{c1} / \partial v_1 & \partial x_{s1} / \partial v_1 \\ \partial x_{c1} / \partial \varphi_1 & \partial x_{s1} / \partial \varphi_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & \operatorname{sen}(\varphi_1) \\ v_1 \operatorname{sen}(\varphi_1) & v_1 \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con determinante

$$|J(v_1, \varphi_1)| = v_1$$

PROCESSI GAUSSIANI: INVILUPPO E FASE

Dim (segue):

Le variabili x_{c1}, x_{s1} sono congiuntamente Gaussiane, a valore atteso nullo, statisticamente indipendenti, con $\sigma_{x_c}^2 = \sigma_{x_s}^2 = \sigma_x^2$. La densità di probabilità congiunta ha quindi la forma

$$p_{X_c X_s}(x_c, x_s) = \frac{1}{(2\pi)\sigma_x^2} \exp\left\{-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma_x^2}\right\}$$

da cui segue la forma della densità di probabilità congiunta di

$$\begin{aligned} p_{V_1, \Phi_1}(v_1, \varphi_1) &= p_{X_c X_s}(v_1 \cos \varphi_1, v_1 \sin \varphi_1) \cdot |J(v_1, \varphi_1)| \\ &= \frac{v_1}{(2\pi)\sigma_x^2} \exp\left\{-\frac{v_1^2}{2\sigma_x^2}\right\} \quad v_1 > 0, \varphi_1 \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

Le Gerarchie di ordine 1 dell'involuppo $v(t)$ e della fase $\varphi(t)$ si calcolano per saturazione a partire dalla d.d.p. congiunta

$$p_{V, \Phi}(v, \varphi).$$

PROCESSI GAUSSIANI: INVILUPPO E FASE

Dim (segue):

$$p_V(v) = \int_0^{2\pi} \frac{v}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} d\varphi = \frac{v}{\sigma_x^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \quad v > 0$$

$$\begin{aligned} p_\Phi(\varphi) &= \int_0^{+\infty} \frac{v}{2\pi\sigma_x^2} e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\exp\left\{-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right\} \right) \Big|_0^{+\infty} \quad v > 0 \end{aligned}$$

Si ha inoltre

$$m_v = \sigma_x \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad m_v^{(2)} = 2\sigma_x^2$$

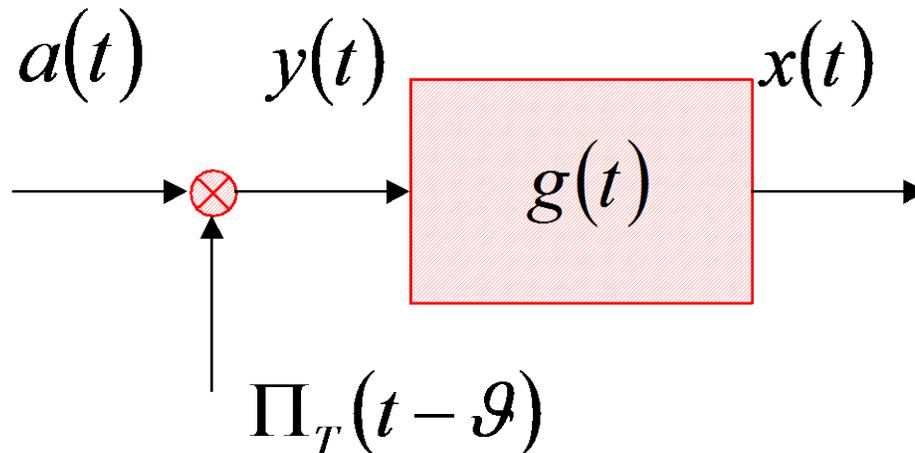
ONDA PAM

➤ **Onda PAM:** processo la cui generica realizzazione è del tipo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k g(t - kT - \mathcal{G})$$

dove a_k è una sequenza di v.a., e \mathcal{G} è una v.a. *a distribuzione uniforme* in $[-T/2, T/2]$, indipendente da a_k .

➤ Modello di generazione dell'onda PAM



➤ $a(t)$: Realizzazione di un processo stazionario ergodico $A(t)$

➤ $\pi_T(t - \mathcal{G}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_0(t - kT - \mathcal{G})$

➤ $g(t)$: Trasformazione lineare permanente

Sotto queste ipotesi l'onda PAM è **stazionaria ed ergodica**.

ONDA PAM

➤ *Valore medio:*

$$m_x = \overline{x(t)}^t = \frac{m_A}{T} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$$

➤ *Dim:* Per le regole del transito in un filtro lineare

$$m_x = \overline{x(t)}^t = \overline{y(t)}^t \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$$

Il segnale $y(t)$ è il prodotto di due realizzazioni di processi stazionari ergodici statisticamente indipendenti:

$$\overline{y(t)}^t = \overline{a(t)}^t \overline{\Pi_T(t - \mathcal{G})}^t = m_a \overline{\Pi_T(t - \mathcal{G})}^t$$

Per \mathcal{G} fissato, $\Pi_T(t - \mathcal{G})$ è un segnale di potenza, per cui

$$\begin{aligned} \overline{\Pi_T(t - \mathcal{G})}^t &= \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{+\Delta t/2} \Pi_T(t - \mathcal{G}) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \Pi_T(t - \mathcal{G}) dt = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

c.v.d.

ONDA PAM

➤ *Funzione di autocorrelazione:*

$$p_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)}^t = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{aa}(kT) \mathbf{E}_{gg}(\tau - kT)$$

➤ *Dim:* Per le regole del transito in un filtro lineare

$$p_{xx}(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)}^t = p_{yy}(\tau) * \mathbf{E}_{gg}(\tau)$$

Il segnale $y(t)$ è il prodotto di due realizzazioni di processi stazionari ergodici statisticamente indipendenti:

$$p_{yy}(\tau) = p_{aa}(\tau) p_{\text{III}}(\tau)$$

Per \mathcal{G} fissato, $\Pi_T(t - \mathcal{G})$ è un segnale periodico, la cui funzione di autocorrelazione è data da

$$\begin{aligned} p_{\text{III}}(\tau) &= \overline{\Pi_T(t - \mathcal{G})\Pi_T(t + \tau - \mathcal{G})}^t = \mathbf{F}^{-1} \{ P_{\text{III}}(f) \} \\ &= \mathbf{F}^{-1} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{T} \right|^2 u_0 \left(f - \frac{k}{T} \right) \right\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_0(t - kT) \end{aligned}$$

$$p_{xx}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} p_{aa}(kT) u_0(\tau - kT) * \mathbf{E}_{gg}(\tau), \text{ c.v.d.}$$

ONDA PAM

○ *Commento:*

Esplicitando la funzione di autocorrelazione di $A(t)$ in funzione del suo valore atteso m_a , si osserva che essa ammette una componente costante:

$$P_{aa}(kT) = K_{aa}(kT) + \underbrace{m_a^2}$$

Nel caso che il valore atteso m_a sia diverso da zero, la funzione di autocorrelazione dell'onda PAM ammette una componente periodica

$$P_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} K_{aa}(kT) \mathbf{E}_{gg}(\tau - kT) + \underbrace{\frac{m_a^2}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{gg}(\tau - kT)}$$

ovvero nello spettro di densità di potenza dell'onda PAM $P_{xx}(f)$ compare un treno di impulsi a distanza $1/T$ (righe spettrali).