Svolgimenti esami del corso di Teoria di Segnali

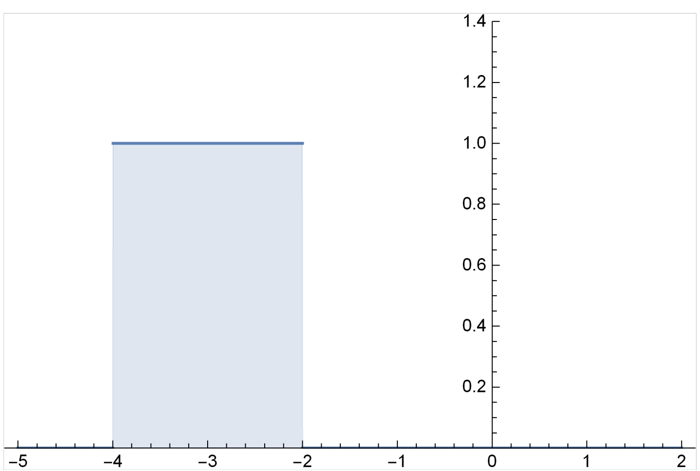
versione 2.1 - ultimo aggionamento 02/02/2020

Autore: Gabriel Emile Hine
mail: gabriel.hine@uniroma3.it (per segnalazione di eventuali errori/refusi)

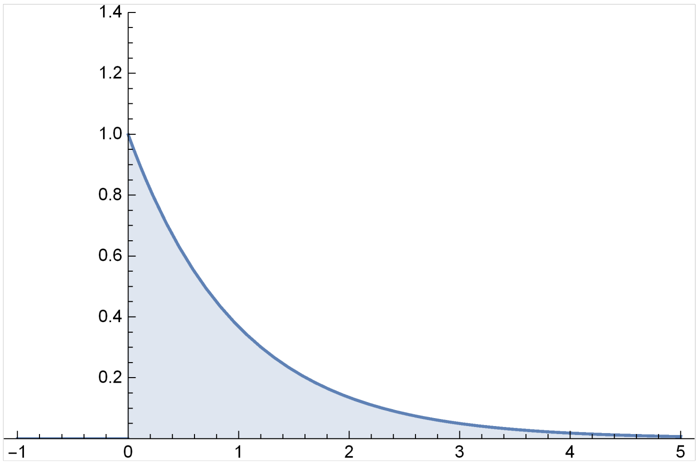
Esame 08/02/2019 Esercizio 1

Dati i segnali in figura

Out[ ]=



$x(t)$

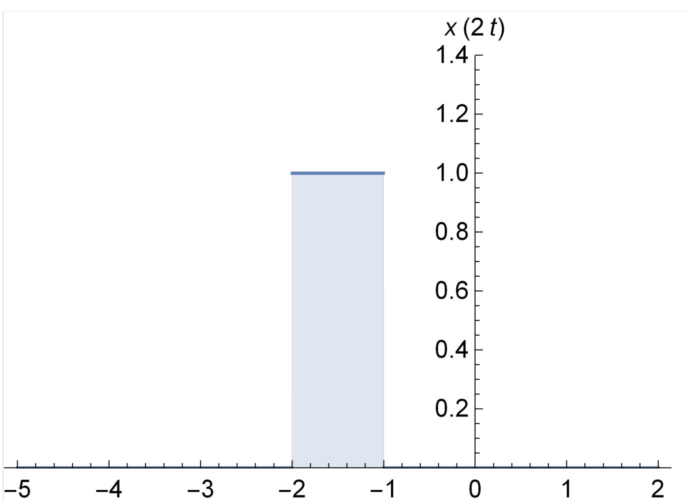
Out[ ]=


$$y(t) \; = \; e^{-t}\, u_{-1}(t)$$

si calcoli la convoluzione sul dominio del tempo tra i segnali x(2 t) e w(t) = y(t) + y(t-2)

Soluzione:

x(2t) = $\text{rect}_1[\, t + 3/2\,]$

Out[ ]=


Per la linearità della convoluzione
x (2t) $\star$ w(t) = x(2t) $\star$ y(t) + x(2t) $\star$ y(t-2)

x(2t) $\star$ y(t) = $\text{rect}_1[\, t + 3/2\,] \star e^{-t}\, u_{-1}(t)$ è riconducibile ad una forma nota [vedi esempio 2.4 , pag 34, Teoria dei Segnali, Roberto Cusani]:

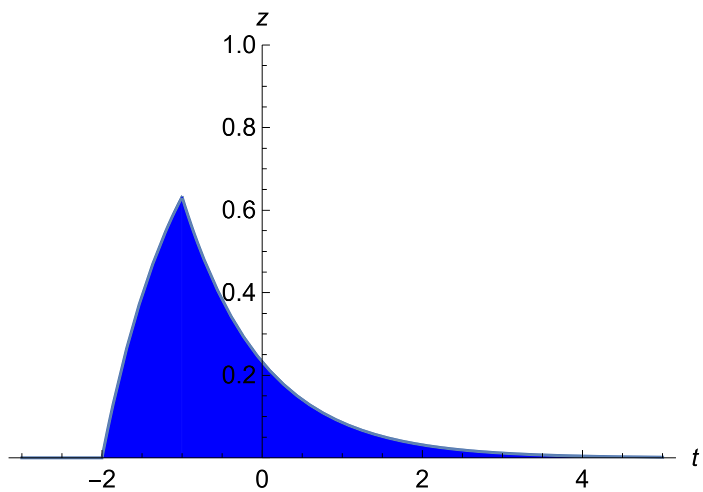
$$\text{rect}_T[\,t - T/2\,] \star e^{-\alpha t}\, u_{-1}(t) = \text{rect}_T[\,t - T/2\,]\; \alpha^{-1}\,(1 - e^{-\alpha t}) + u_{-1}(t)\;\; \alpha^{-1}\left(e^{\alpha T} - 1\right) e^{-\alpha t}$$

(si noti come nell'ultima espressione la rect e la funzione gradino siano state usate per definire gli intervalli della funzione definita a tratti. Questo renderà immediata la somma con la seconda componente)

ne segue: $x(2t) * y(t) = z(t) = \mathrm{rect}_1[t+3/2] * e^{-t}\, u_{-1}(t) =$

$$= \mathrm{rect}_T[t+3/2]\ \left(1-e^{-(t+2)}\right) + u_{-1}(t+1)\ (e-1)\, e^{-(t+2)}$$

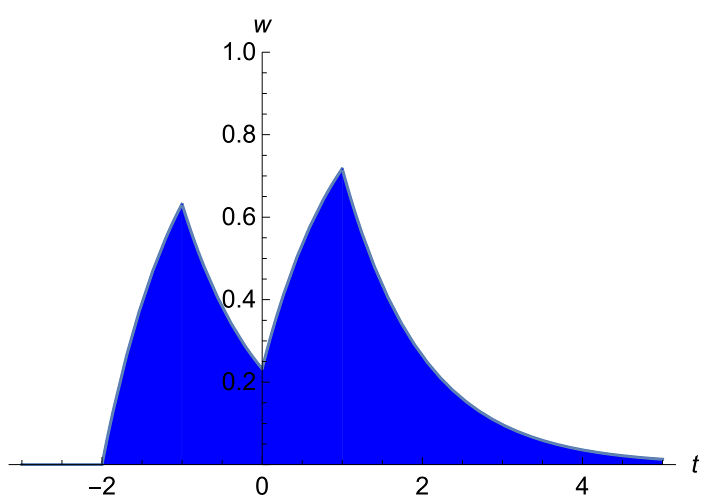
Out[ ]=



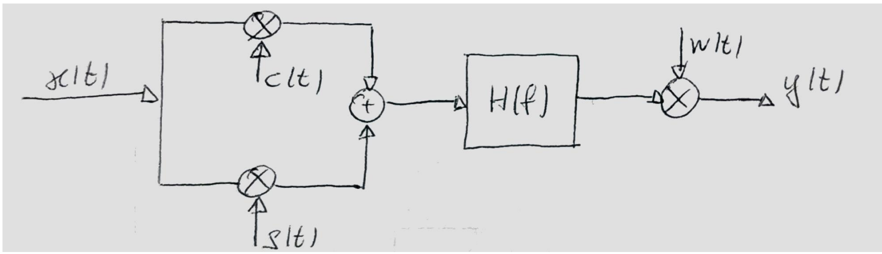
$w(t) = x(2t) * y(t) + x(2t) * y(t\text{-}2) = z(t) + z(t\text{-}2) =$

$= \mathrm{rect}_T[t+3/2]\ \left(1-e^{-(t+2)}\right) + u_{-1}(t+1)\ (e-1)\, e^{-(t+2)} + \mathrm{rect}_T[t-1/2]\ \left(1-e^{-t}\right) +$
$u_{-1}(t-1)\ (e-1)\, e^{-t}$

Out[ ]=



Esame 08/02/2019 Esercizio 2



Dato lo schema in figura, con

x(t) = $\sum_k u_0(t - k T)$ c(t) $= \cos(2\pi f_0 t)$ s(t) $= \sin(2\pi f_0 t)$ $T = 1$ $f_0 = 1/(4T)$

H(f) = $\mathrm{Ca}^2[\pi f T]$ w(t) = $\mathrm{rect}_{3T}[t - 3T/2]$

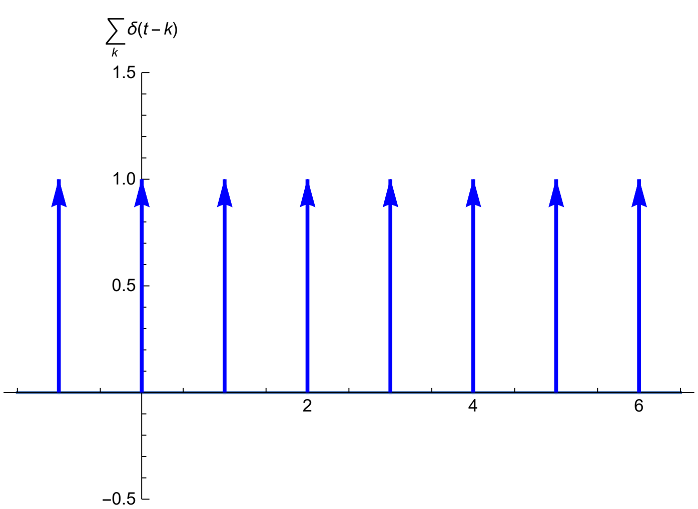
si calcoli Y(f)

Soluzione:

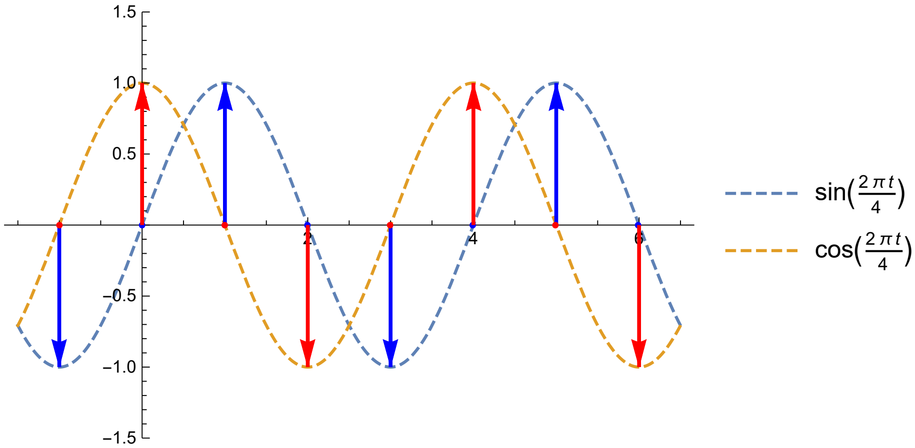
h(t) = $F^{-1}\{$ H(f) $\} = \frac{1}{T}\,\mathrm{tri}_T[\,t\,]$

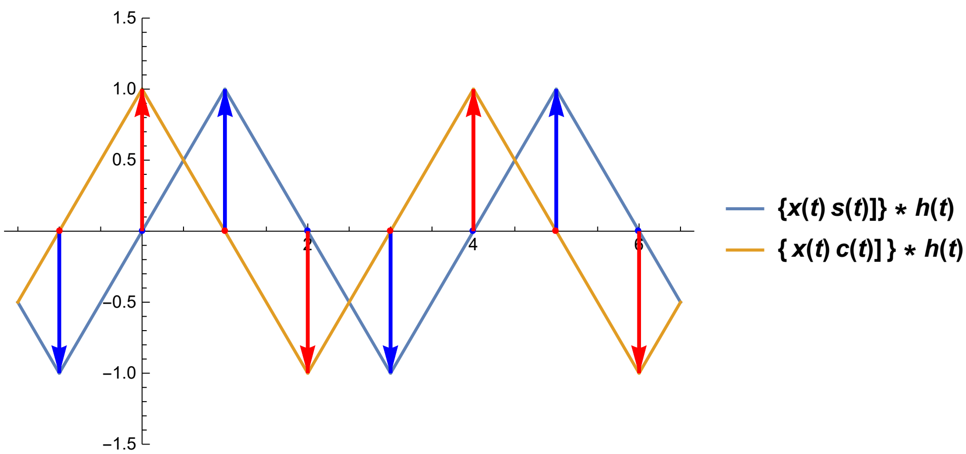
Graficamente (T=1):

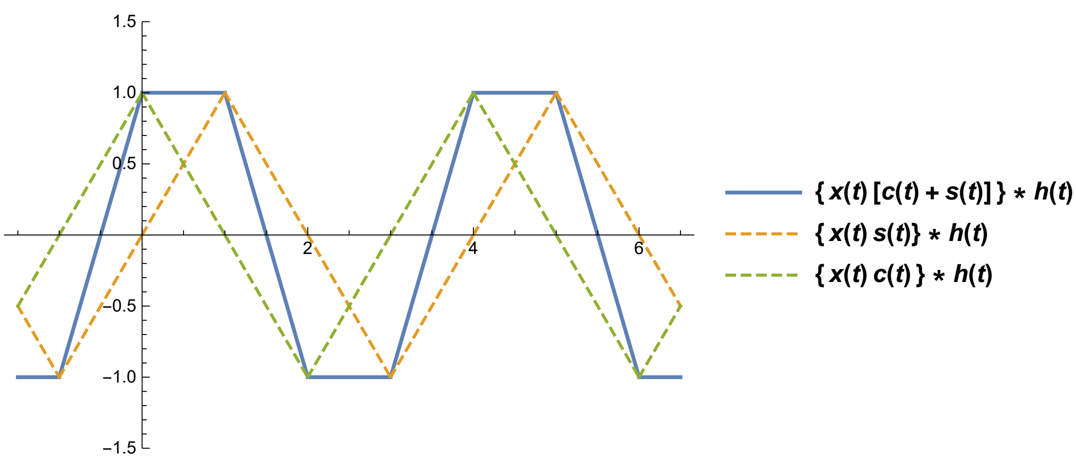
Out[ ]=



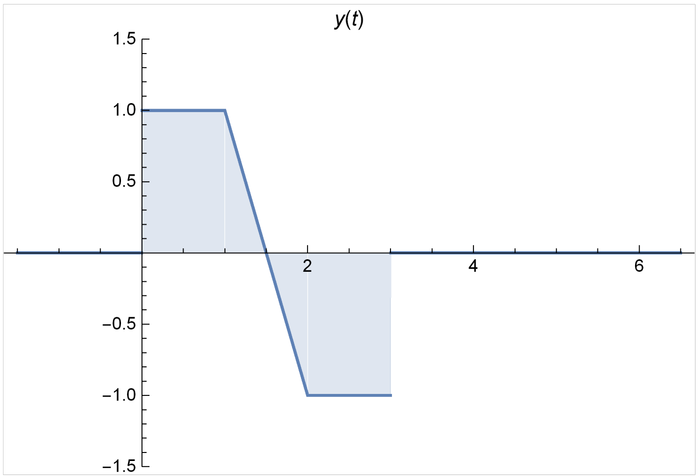
Out[∘]=


$\sin\left(\frac{2\pi t}{4}\right)$
$\cos\left(\frac{2\pi t}{4}\right)$


$\{x(t)\, s(t)]\} * h(t)$
$\{x(t)\, c(t)]\} * h(t)$


$\{x(t)\,[c(t)+s(t)]\} * h(t)$
$\{x(t)\, s(t)\} * h(t)$
$\{x(t)\, c(t)\} * h(t)$

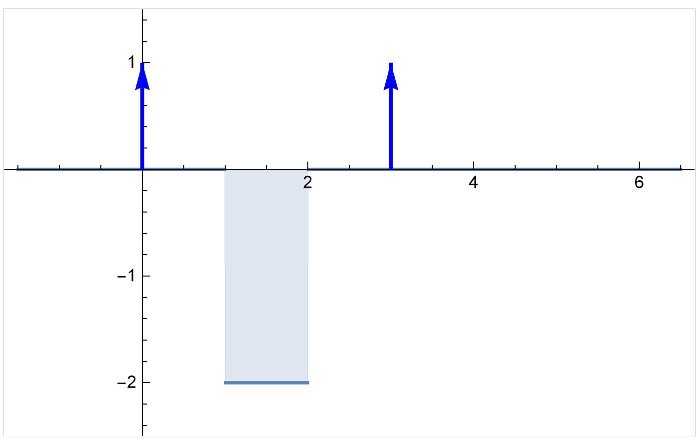
Out[ ]=



Si noti come per disegnare y(t) non abbiamo dovuto fare alcun conto analitico ma solo passaggi grafici.
A questo punto, per calcolare Y(f), sfruttiamo la proprietà della derivata:
$Y(f) = 1/(j\, 2\pi f)\, F\{y'(t)\}$

Ancora graficamente, la derivata di y(t) è

Out[ ]=

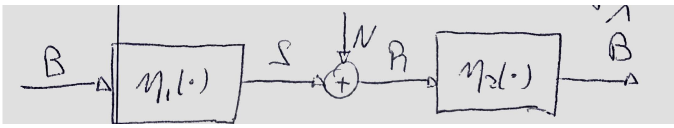


$$y'(t) = \delta(t) - 2\,\text{rect}_1(t - 3/2) + \delta(t-3)$$

$$F\{y'(t)\} = \left(1 - 2\, e^{-j3\pi f}\, \text{Ca}(\pi f) + e^{-j6\pi f}\right)$$

$$Y(f) = \left(1 - 2\, e^{-j3\pi f}\, \text{Ca}(\pi f) + e^{-j6\pi f}\right) / (j\, 2\, \pi f)$$

Seconda prova di accertamento 31/01/2019 - Esercizio 1



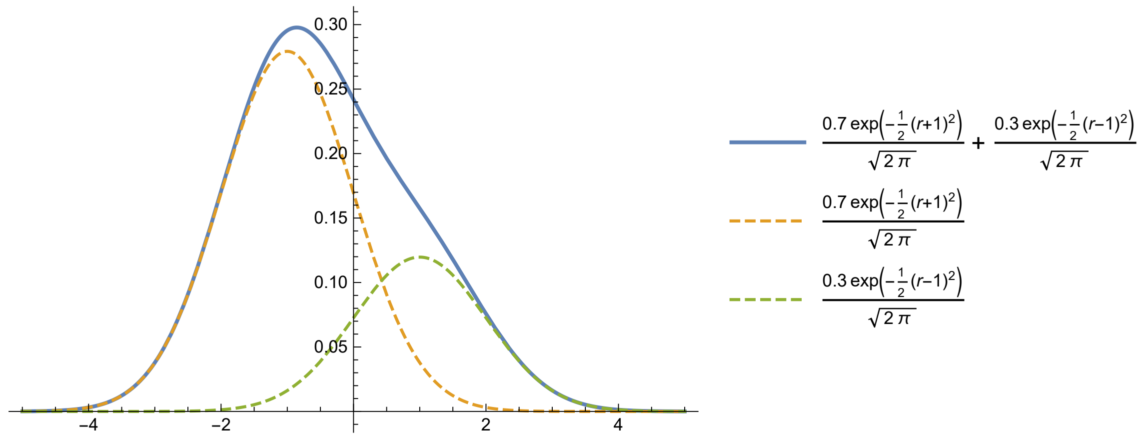
Si consideri lo schema in figura dove
B è una variabili aleatoria discreta con funzione di densità di probabilità $p_B(b) = 0.7\,\delta(b) + 0.3\,\delta(b-1)$,
$\eta_1()$ è una non linearità istantanea $S = \eta_1(B) = 2B - 1$
N è una v.a. Gaussiana a valor medio nullo e varianza unitaria, statisticamente indipendente da B
$\eta_2()$ è una non linearità istantanea $\hat{B} = \eta_2(R) = \mu_{-1}(R)$

Si calcoli
a) la funzione di densità di probabilità $p_{\hat{B}}(\hat{b})$
b) la funzione di densità di probabilità condizionata $p_{\hat{B}|B}\left(\hat{b} \mid [b = 0]\right)$

Soluzione:
a)
quando si trattano le non linearità istantanee in presenza di v.a. discrete, è controproducente utilizzare la formula dello Jacobiano.
Piuttosto, conviene ragionare in maniera combinatoria: (b = 0) → (s = -1); (b = 1) → (s = +1). E' intuitivo convincersi che
$P_S(s = -1) = P_B(b = 0)$
$P_S(s = +1) = P_B(b = 1)$
Ne consegue: $p_S(s) = 0.7\,\delta(s+1) + 0.3\,\delta(s-1)$

Ora, essendo S ed N indipendenti, la f.d.p. di R si calcola tramite la convoluzione:
$p_R(r) = p_S(r) * p_N(r) = 0.7\,p_N(r+1) + 0.3\,p_N(r-1)$
dove $p_N(r) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{-\frac{r^2}{2}}$

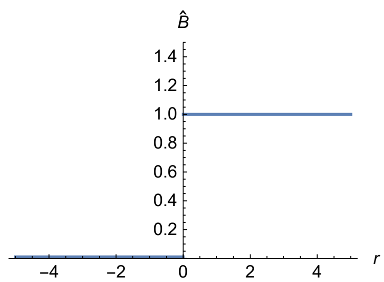
Out[∘]=



A questo punto, applicando le regole standard delle non linearità istantanee con tratti costanti:

$\hat{B} = \eta_2(R) = \mu_{-1}(R)$

Out[∘]=



$P_0 = P_{\hat{B}}(\hat{b}=0) =$

$\int_{-\infty}^{0} p_R(r)\,\mathrm{dr} =$

$.7\int_{-\infty}^{0} p_N(r+1)\,\mathrm{dr} + .3\int_{-\infty}^{0} p_N(r-1)\,\mathrm{dr} = .7\int_{-\infty}^{1} p_N(r)\,\mathrm{dr} + .3\int_{-\infty}^{-1} p_N(r)\,\mathrm{dr} = .7\,D_N(1) + .3\,D_N(-1)$

$P_1 = P_{\hat{B}}(\hat{b}=1) = \int_0^{\infty} p_R(r)\,\mathrm{dr} = .7\int_0^{\infty} p_N(r+1)\,\mathrm{dr} + .3\int_0^{\infty} p_N(r-1)\,\mathrm{dr} =$

$.7\int_1^{\infty} p_N(r)\,\mathrm{dr} + .3\int_{-1}^{\infty} p_N(r)\,\mathrm{dr} = .7\,[1 - D_N(1)] + .3[1 - D_N(-1)]$

dove $D_N(n)$ è la funzione di probabilità cumolata di N, ovvero la error function.

In definitiva, $p_{\hat{B}}(\hat{b}) = P_0\ \delta(\hat{b}) + (1 - P_0)\ \delta(\hat{b}-1)$

b) $p_{\hat{B}|B}\left(\hat{b} \mid [b=0]\right)$

il condizionamento rispetto all'ipotesi b=0 si traduce semplicemente nella sostituzione nello schema della realizzazione b=0 in luogo della v.a. b. Si ha quindi:

$b = 0 \to s = -1 \to r = n - 1$

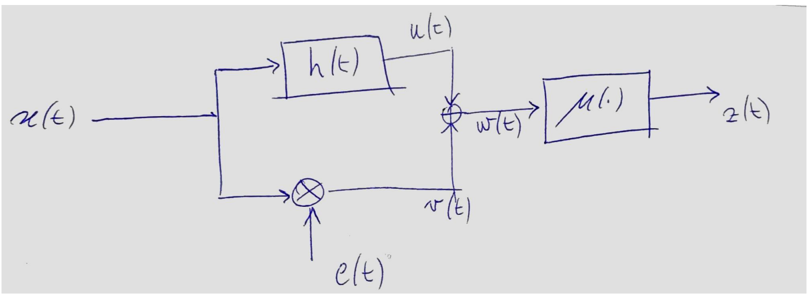
$p_{R|B}(r \mid b=0) = p_N(n) * \delta(n+1) = p_N(n+1)$

$P_{0|0} = P_{\hat{B}|B}\left(\hat{b}=0 \mid b=0\right) = \int_{-\infty}^{0} p_{R|B}(r \mid b=0)\,\mathrm{dr} = \int_{-\infty}^{0} p_N(r+1)\,\mathrm{dr} = \int_{-\infty}^{1} p_N(r)\,\mathrm{dr} = D_N(1) \sim 0.84$

$P_{1|0} = P_{\hat{B}|B}\left(\hat{b}=1 \mid b=0\right) = \int_{0}^{\infty} p_{R|B}(r \mid b=0)\,\mathrm{dr} = \int_{0}^{\infty} p_N(r+1)\,\mathrm{dr} = \int_{1}^{\infty} p_N(r)\,\mathrm{dr} = 1 - D_N(1) \sim 0.16$

$p_{\hat{B}|B}\left(\hat{b} \mid b=0\right) = D_N(1)\,\delta(\hat{b}) + [1 - D_N(1)]\,\delta(\hat{b}-1)$

Prima prova di accertamento 24/11/2018



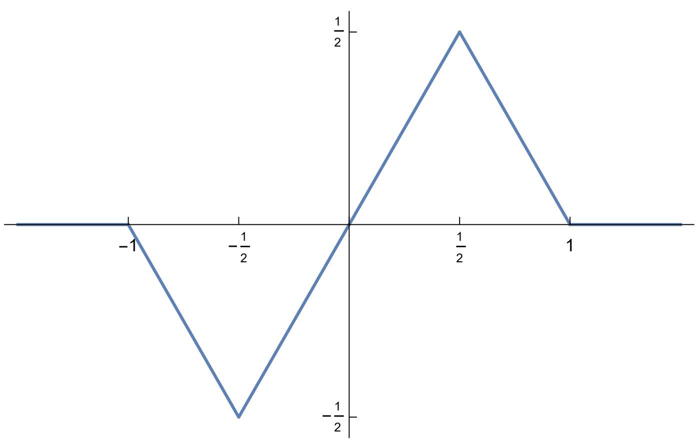
Dato lo schema in figura con

$x(t) = \sum_k \delta(t - kT)$

$c(t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_0 t) \quad f_0 = \frac{1}{4T}$

$h(t) = -\frac{t}{T} \text{rect}_{2T}(t)$

e $\eta(\,)$ non linearità istantanea riportata in figura

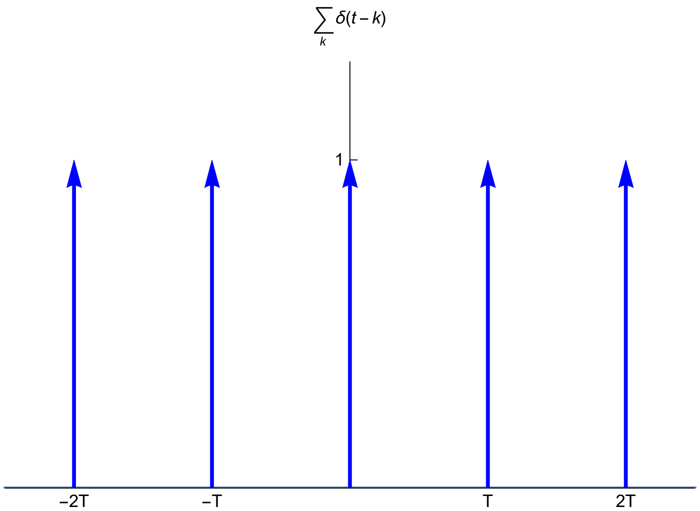
Out[ ]=


Si calcoli $Z(f)$

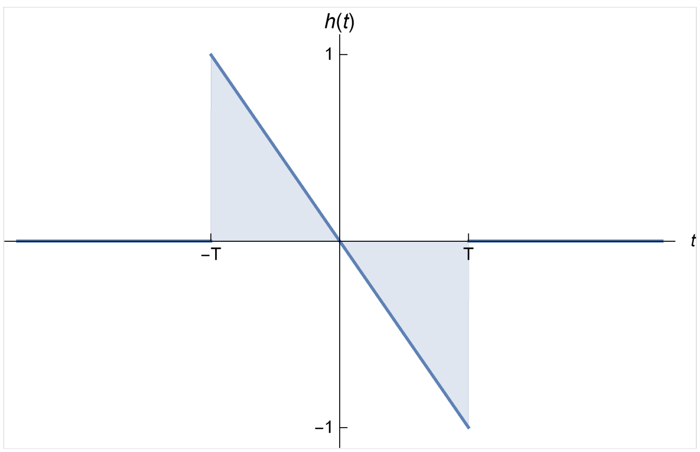
Soluzione:

graficamente

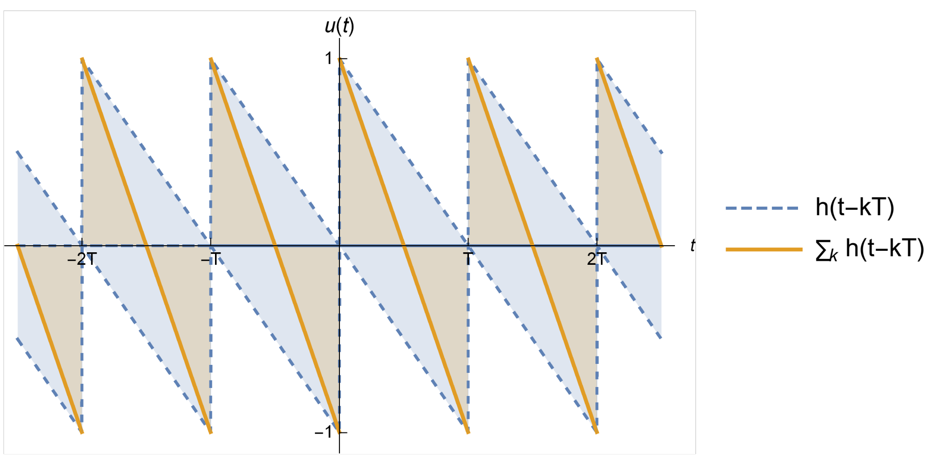
Out[ ]=

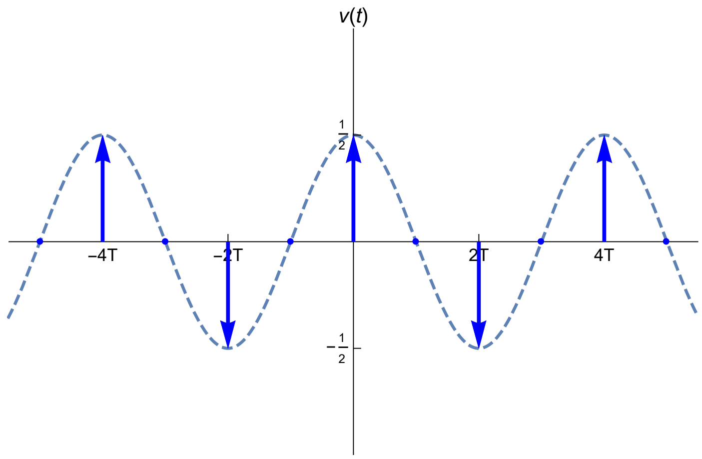


Out[ ]=

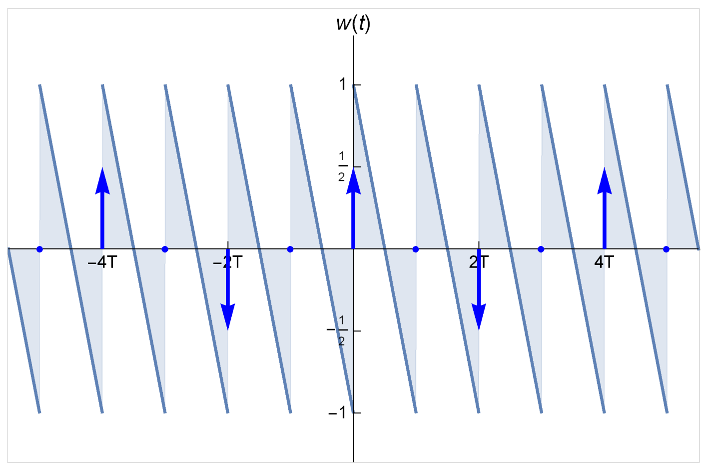


Out[ ]=



Out[ ]=


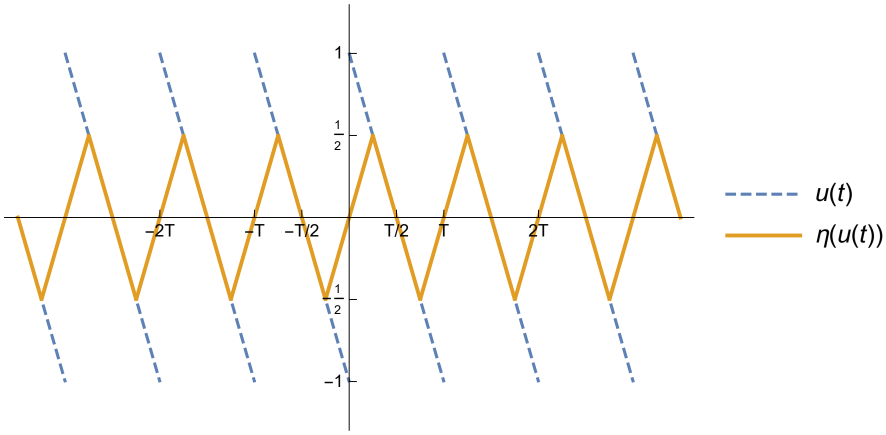
sommando i due contributi: w(t) = u(t) + v(t)

Out[ ]=


Ora applichiamo la nonlinearità.
 Si noti come $\eta(\infty) = \eta(-\infty) = 0$.
Ne consegue che negli istanti t = ..., -2T,-T, 0, T, 2T,.... l’uscita z(t) varrà 0.

In tutti gli altri punti applichiamo la procedura classica. (si noti bene che, qualsiasi sia il risultato, nei punti -2T,-T, 0, T, 2T vi saranno in ogni caso degli zeri - Essendo una non linearità, non vale il principio di sovrapposizione degli effetti!)

Out[ ]=



In questo caso specifico, dato che η (u(t)) già si annulla nei punti sopra citati, il risultato coincide con z(t).

Per ispezione, la forma analitica è:

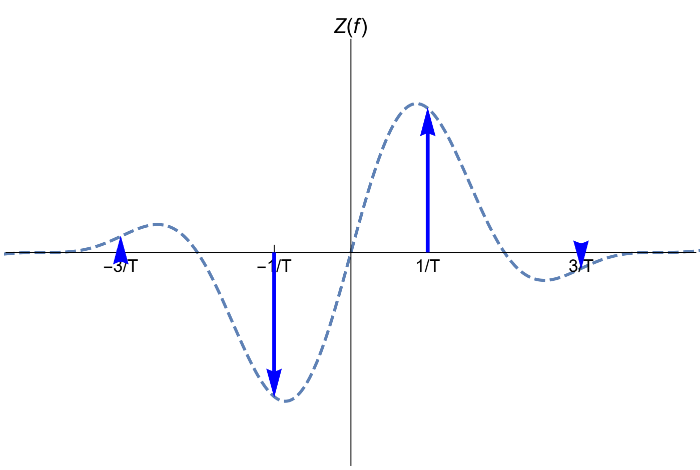
$\sum_k g(t-kT)$ dove $g(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tri}_{\frac{T}{4}}(t) * [\delta(t-T/4) - \delta(t+T/4)]$

$\to Z(f) = \sum_k Z_K\,\delta(f-k/T)$ dove $Z_K = G(k/T)$

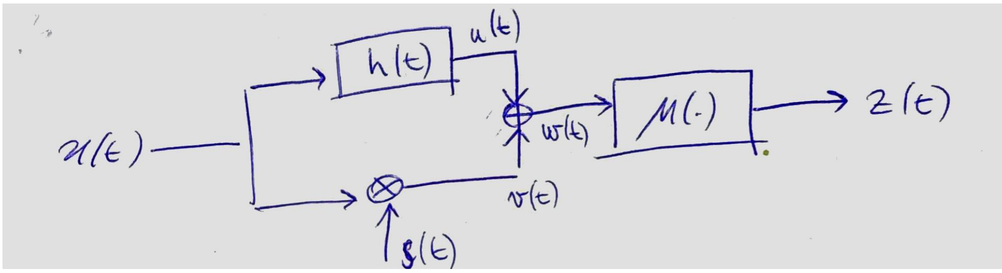
$G(f) = F\{g(t)\} = 1/2\ F\{\mathrm{tri}_{\frac{T}{4}}(t)\}\ F\{\delta(t-T/4) - \delta(t+T/4)\} = -j\,\frac{T}{4}\,\mathrm{Ca}^2\left[\pi\,\frac{T}{4}f\right]\sin\left(\pi\,\frac{T}{2}f\right)$

$Z_k = G(k/T) = -j\,\frac{T}{4}\,\mathrm{Ca}^2\left[\frac{\pi}{4}k\right]\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$

Out[ ]=



Prima prova di accertamento 24/11/2018



dato lo schema in figura dove

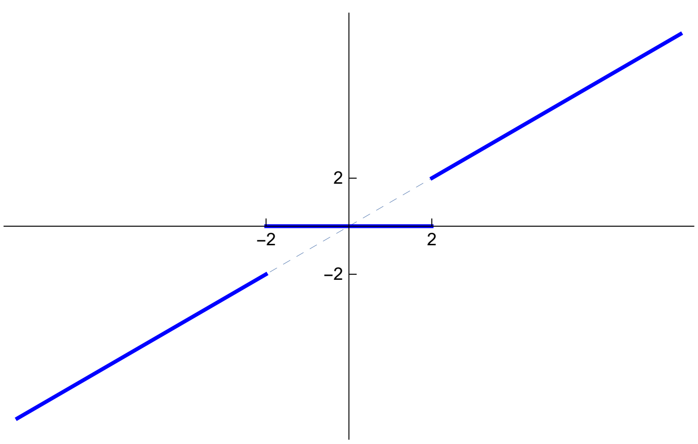
$h(t) = \text{tri}_{\frac{3}{4}T}(t)$

$s(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi f_0 t) \quad f_0 = \frac{1}{8T}$

$x(t) = \sum_k \delta(t - \text{kT})$

e $\eta(\,)$ non linearità istantanea come in figura :

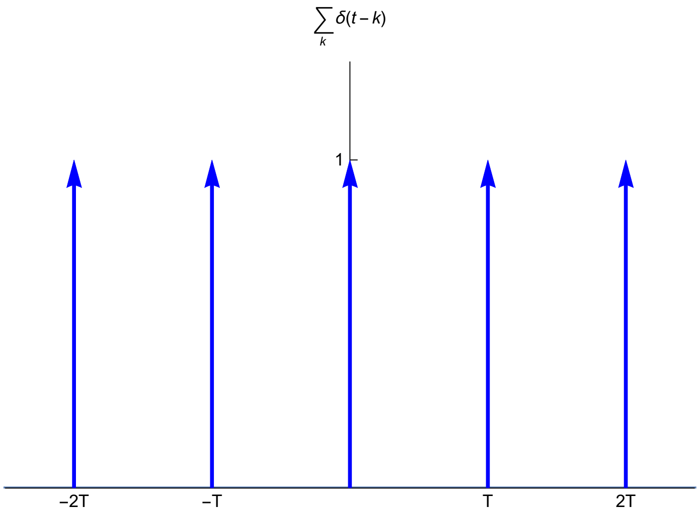
Out[∘]=



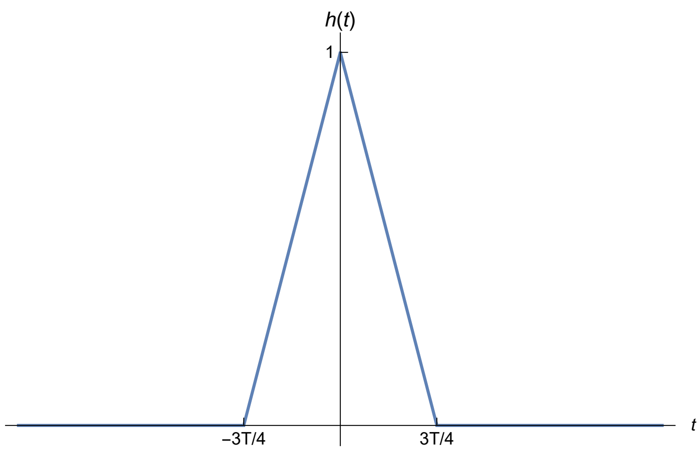
Soluzione:

Graficamente,

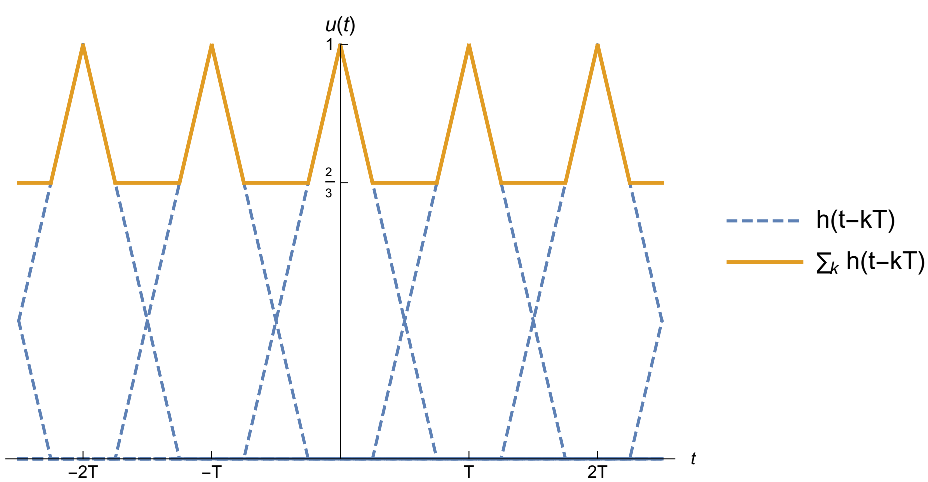
Out[ ]=


$\sum_k \delta(t-k)$
1
−2T
−T
T
2T

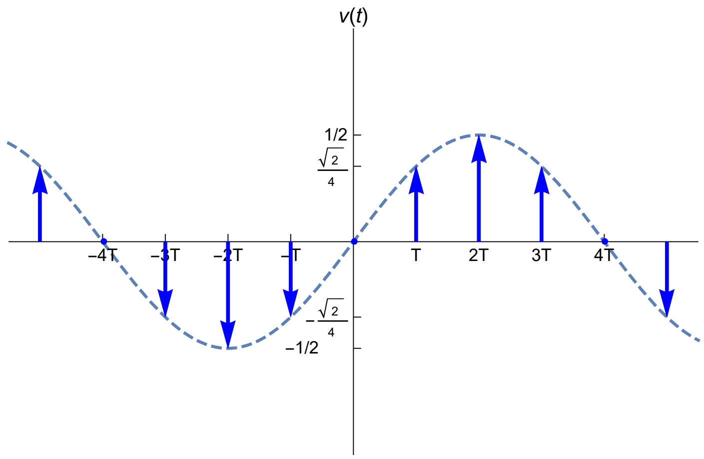
Out[ ]=


$h(t)$
1
t
−3T/4
3T/4

Out[ ]=

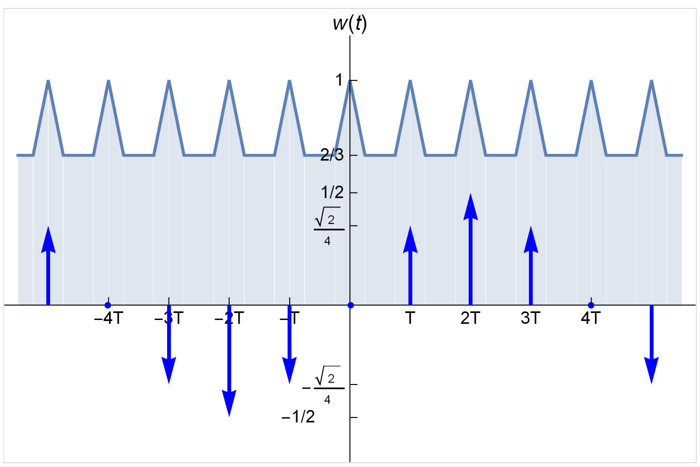

$u(t)$
1
$\frac{2}{3}$
t
−2T
−T
T
2T
h(t−kT)
$\sum_k$ h(t−kT)

Out[ ]=



sommando i due contributi, w(t) = u(t) + v(t)

Out[ ]=



Ora applichiamo la non-linearità.

Si noti come $\lim_{w \to \infty} \eta(w) = \text{w}$ *e* $\lim_{w \to -\infty} \eta(w) = \text{w}$

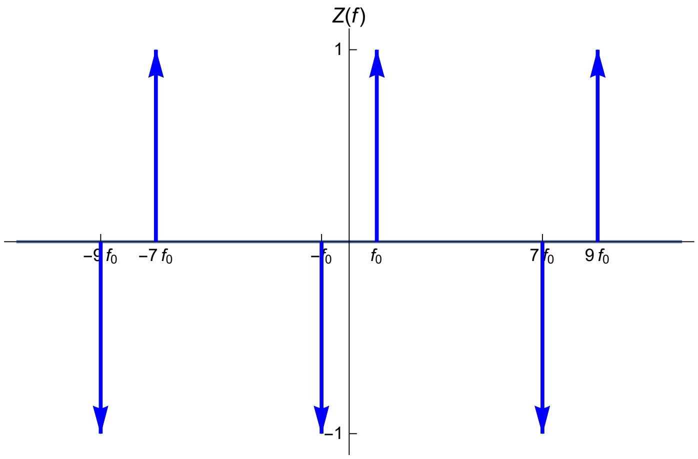
Ne consegue che negli istanti t = ..., -2T,-T, 0, T, 2T,.... l'uscita coincide con l'ingresso: z(kT) =w(kT).

Il resto del segnale è in modulo sempre minore di 2, ovvero il suo contributo alla non linearità è nullo.

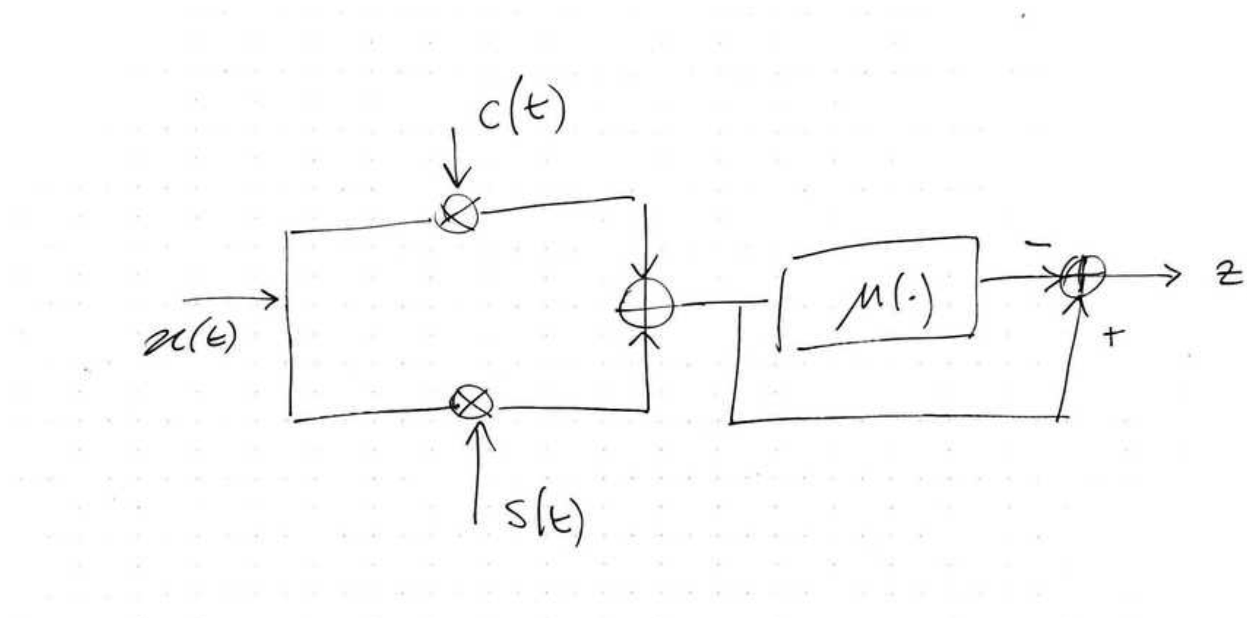
In definitiva, $z(t) = v(t) = s(t)\,x(t) = \frac{1}{2}\sin(2\pi f_0 t) \sum \delta(\text{t-kT})$ con $f_0 = \frac{1}{8T}$

$Z(f) = S(f) * X(f) = \frac{1}{4j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] * \sum_k \delta(f - 8kf_0) = \frac{j}{4} \sum_k [\delta(f - 8kf_0 + f_0) - \delta(f - 8kf_0 - f_0)]$

Out[∘]=



Esame 28 feb 2019. Es 2



Dato lo schema in figura, siano

$X(f) = T\,\mathrm{tri}_W(2f)$ $\quad w = 2/T$

$c(t) = \sum_k \delta(t - kT)$
$s(t) = \sin(2\pi t/T)$

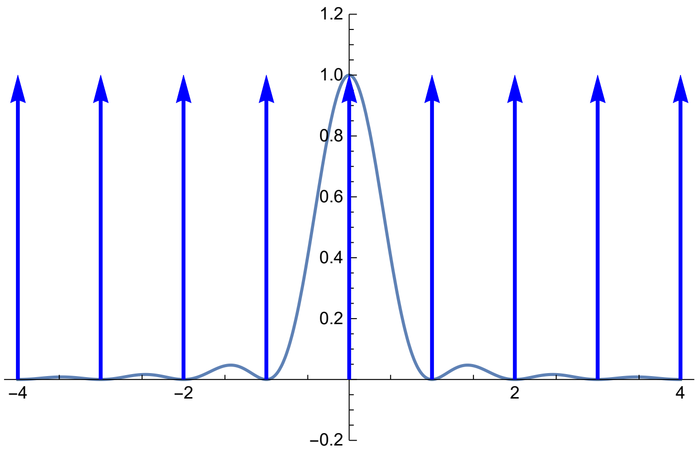
$\eta(x) = u_{-1}[x-1]\,(x-1) + u_{-1}[-(x+1)]\,(x+1)$

calcolare le componenti analogiche di z(t) rispetto a $f_0 = 1/(2T)$

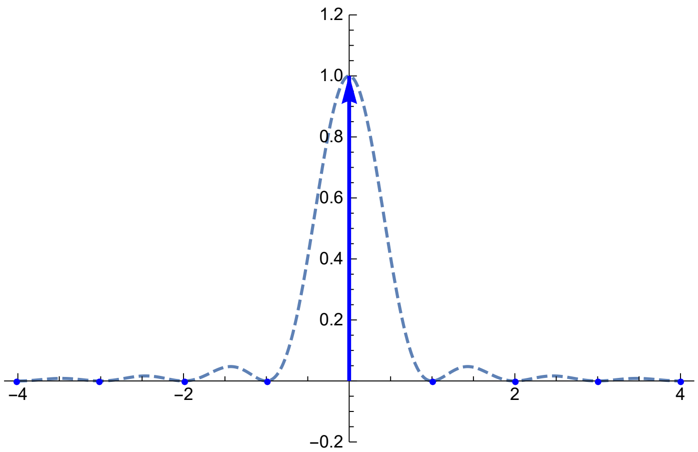
Soluzione

$X(f) = T\,\mathrm{tri}_W(2f) = T\,\mathrm{tri}_{W/2}(f) = T\,\mathrm{tri}_{1/T}(f)$
$x(t) = \mathrm{Ca}^2[\pi t/T]$

Out[ ]=



Out[ ]=

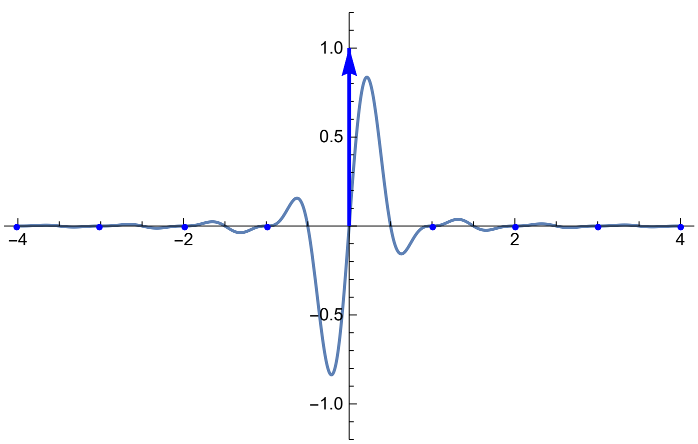


x(t)c(t) $= \sum_k \; \mathrm{Ca}^2[\pi k]\, \delta(t - \mathrm{k}T) = \delta(t)$

x(t)s(t) $= \mathrm{Ca}^2[\pi t / T] \sin(2\pi)$

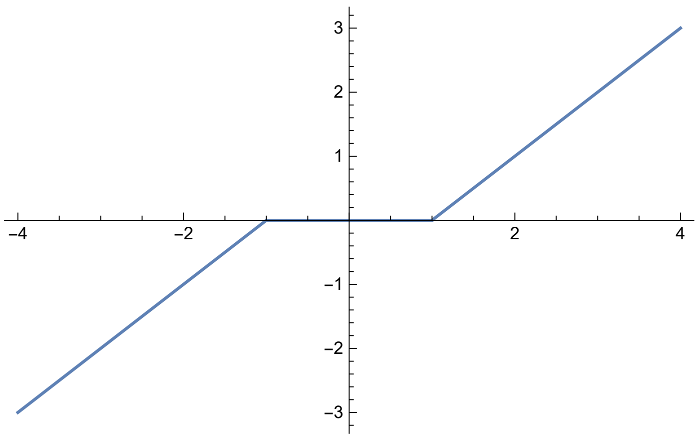
w(t) = x(t)s(t) + x(t)c(t) = $\delta(t) + \mathrm{Ca}^2[\pi t / T] \sin(2\pi)$

Out[ ]=



$\eta(x) = u_{-1}[\mathrm{x}-1]\,(\mathrm{x}-1) + u_{-1}[-(\mathrm{x}+1)]\,(\mathrm{x}+1)$

come in figura

Out[ ]=


Si noti come $\lim_{w \to \infty} \eta(w) = \lim_{w \to \infty} w - 1 = w$

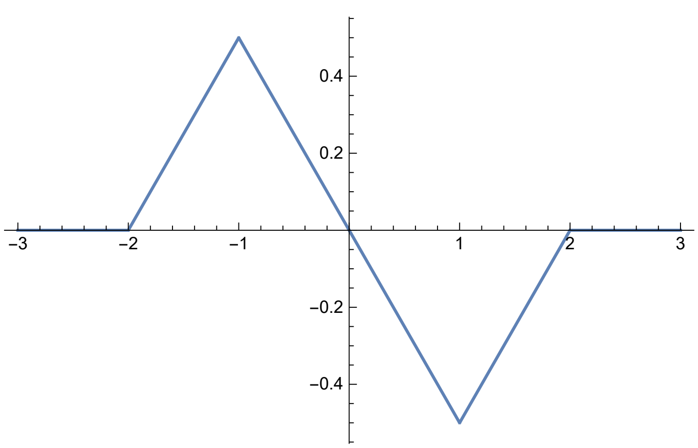
Ciò significa che l'impulso passa inalterato

il resto del segnale è in modulo minore di 1. $|Ca^2[\pi t / T] \sin(2\pi)| <= 1$
ovvero il suo contributo alla non linearità è nullo .

ne segue: $\eta(w(t)) = \delta(t)$

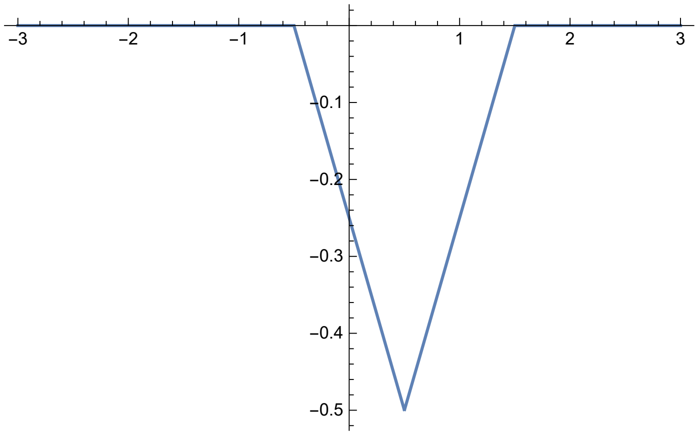
$z(t) = \delta(t) + Ca^2[\pi t / T] \sin(2\pi) - \delta(t) = Ca^2[\pi t / T] \sin(2\pi t / T)$

$Z(f) = 1/T\ tri_{1/T} * (\delta(f - 1/T) - \delta(f + 1/T))/(2j)$

Out[ ]=


$Z^{+}(f + f_0) = Z^{+}\left(f + \frac{1}{2T}\right) = -\frac{j}{2T} \mathtt{tri}_{1/T} (f - \frac{1}{2T})$

Out[ ]=



Per il calcolo delle componenti analogiche a bassa frequenza, basta calcolare l'antitrasformata $F^{-1}\{Z^{+}(f+f_0)\}$

Si lascia quesa parte come esercizio per il lettore.

Esonero 22 gen 2020. Es 1

Esercizio 1

Sia X una variabile aleatoria a distribuzione Gaussiana a valore medio nullo e varianza unitaria

Sia inoltre $\mu(\cdot)$ una non-linearità istantanea

$$X \longrightarrow \boxed{\mu(\cdot)} \longrightarrow Y$$

$$y = \mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

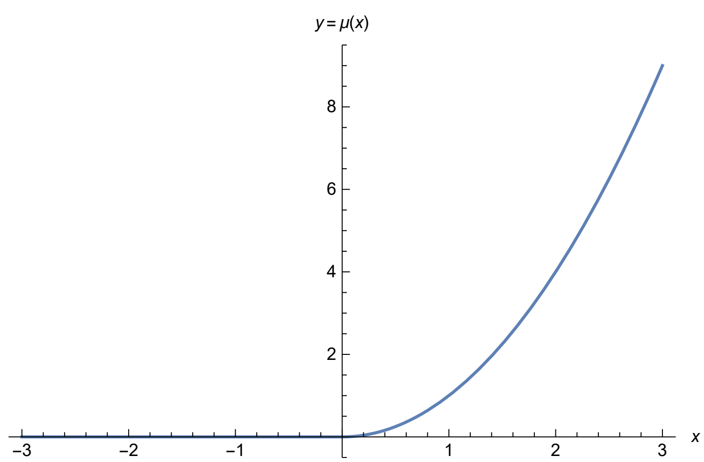
Si calcoli

a) la funzione di densità di probabilità di Y $p_Y(y)$

b) la funzione di densità di probabilità di X/Y $p_{X/Y}(x/y)$ e la funzione di distribuzione $D_{X/Y}(x/y)$

Out[•]= $px[x] = \frac{\mathrm{Exp}\left[-\frac{x^2}{2}\right]}{\sqrt{2\pi}}$

Out[•]=



a)

Tratto costante $y = 0$:

$$P[y = 0] = \int_{-\infty}^{0} px[x]\, dx = \frac{1}{2}$$

(per simmetria)

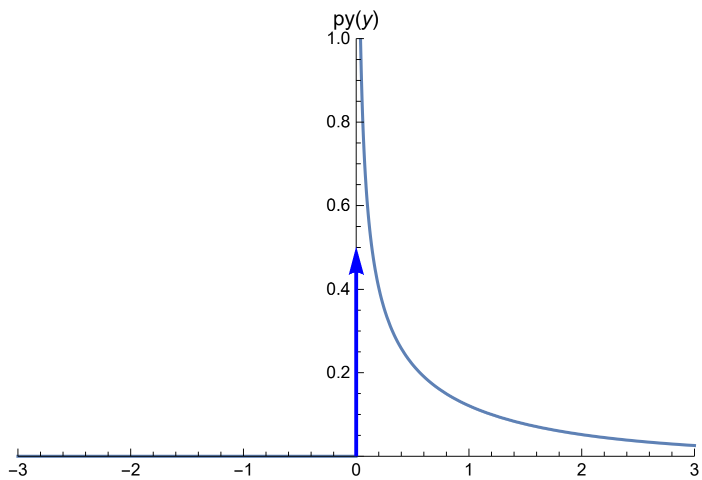
Tratto $y>0$:

Out[ ]= $$py[y] = px\left[\sqrt{y}\right] \left|\partial_y \sqrt{y}\right| = \frac{\text{Exp}\left[-\frac{y}{2}\right]}{\sqrt{2\pi}\left(2\sqrt{y}\right)}$$

Complessivamente :

Out[ ]= $$py[y] = \frac{\delta[y]}{2} + \frac{\text{Exp}\left[-\frac{y}{2}\right]}{\sqrt{2\pi}\left(2\sqrt{y}\right)} . u_{-1}[y]$$

Out[ ]=



b)

Per calcolare p(x|y) NON utilizzeremo la nota formula p(x,y)/p(y), ma piuttosto sfrutteremo le relazioni dettate dalla non linearità istantanea:
Seperiamo i casi y<0, y=0, y>0:

y<0: non ammisibile

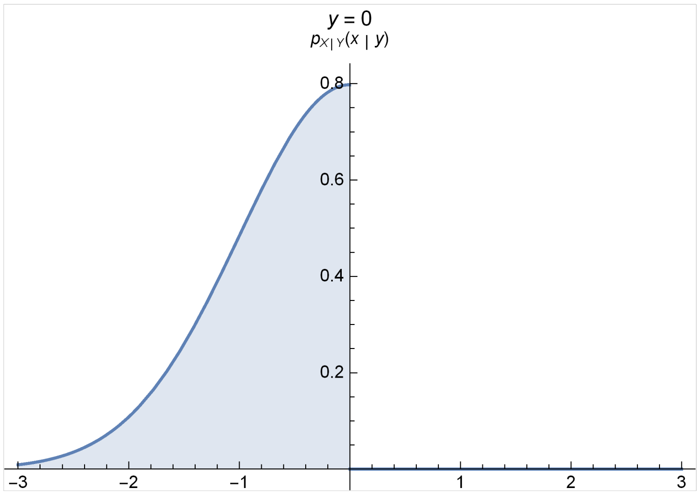
$y = 0 \quad \rightarrow x < 0$ (non abbiamo nessuna informazione su X, apparte che sia minore di 0). Ne consegue:

Out[ ]= $p_{X|Y}[x \mid y] = p_X[x \mid x < 0]$

In[ ]:= $\frac{p_X}{P[x<0]} = 2\, p_X[x]\, u_{-1}[-x]$

Out[ ]= $\frac{p_X}{P[x<0]} = 2\, p_X[x]\, u_{-1}[-x]$

Out[ ]=



y > 0 → noto y, x è completamente definito dalla non linearità → evento certo

Out[ ]= $x = \sqrt{y}$

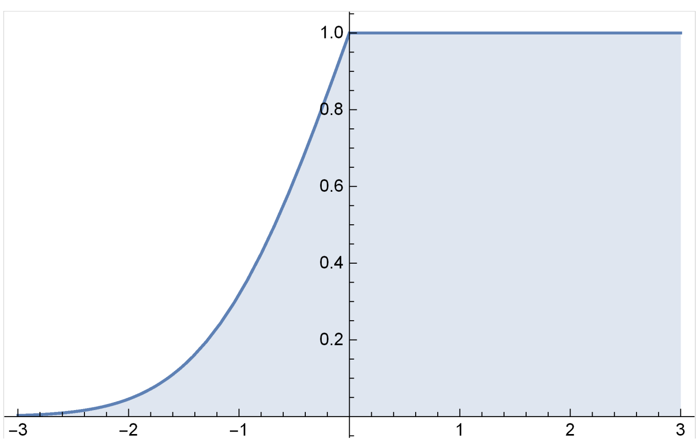
Out[ ]= $p_{X|Y}[x \mid y,\, y > 0] = \delta\left[x - \sqrt{y}\right]$

Il calcolo della funzione di distribuzione è immediato:

y=0

Out[ ]= $D_{X|Y}[x \mid y] = 2\, D_X[x]\, u_{-1}[-x] + u_{-1}[x]$

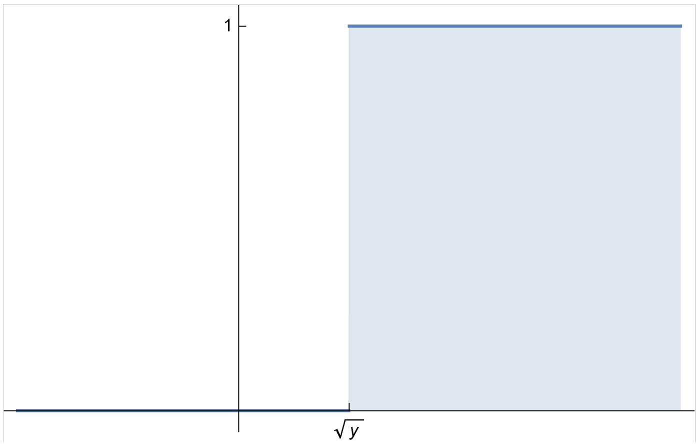
Out[ ]=



y>0

Out[ ]= $D_{X|Y}[x \mid y] = u_{-1}\left[x - \sqrt{y}\right]$

Out[ ]=



Esame 31 gen 2020. Es 3

Sia X una variabile aleatoria con funzrion di densità di probabilità

Out[ ]= $px[x] = \frac{1}{2}.tri_2[x]$

ed f(.) una trasformazione

Out[ ]= $y = f[x] = x\,(x-2)$

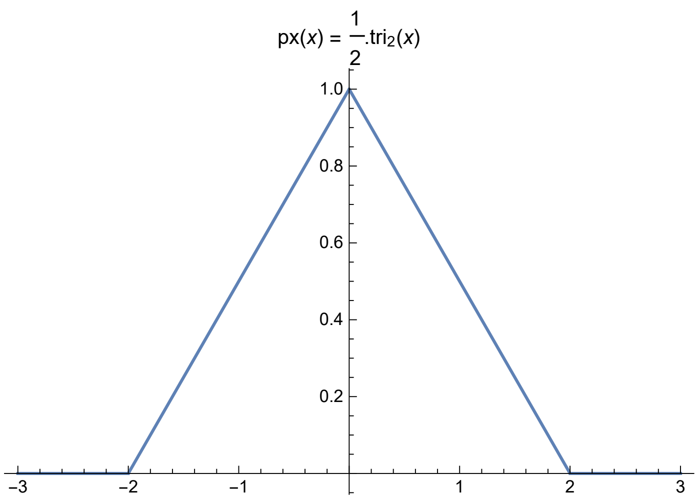
a) Si calcoli la funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria Y = X (X-2)

b) Si calcoli la funzione di densità di probabilità congiunta della v.a. (X,Y)

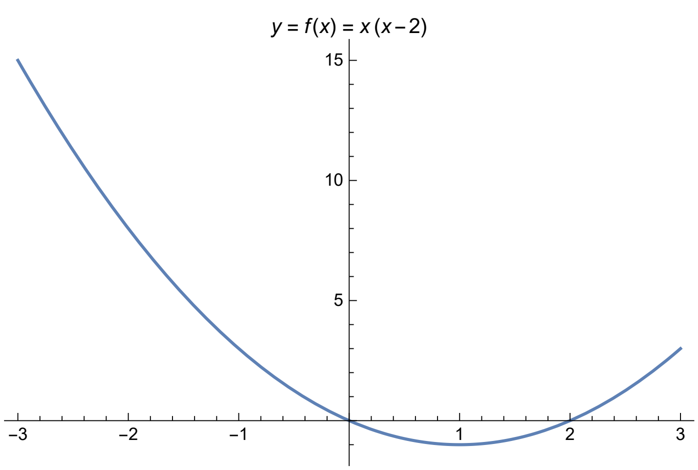
c) Si calcoli il valore atteso di Y.

Soluzione

Out[ ]=



Out[ ]=



Out[ ]= $py[y] = \sum_i{}' px[g_i[y]] \, |\partial_y g_i[y]|$

dove le g_i sono i tratti della funzione inversa:

Out[ ]= $g[y] = \sum_i g_i[y] = f^{-1}[y]$

invertiamo f(x):

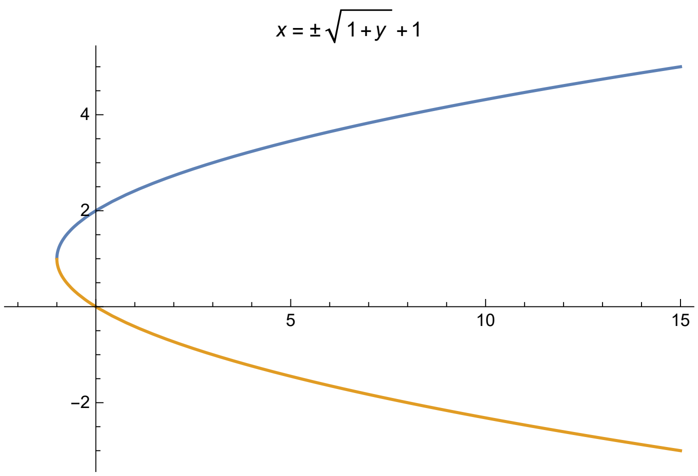
Out[ ]= $y = x\left(x-2\right) = x^2 - 2x$

Out[ ]= $x^2 - 2x - y = 0$

equazione di II grado rispetto a x:

Out[ ]= $x = \pm\sqrt{1+y} + 1 = g[y]$

Out[ ]=



deriviamo g:

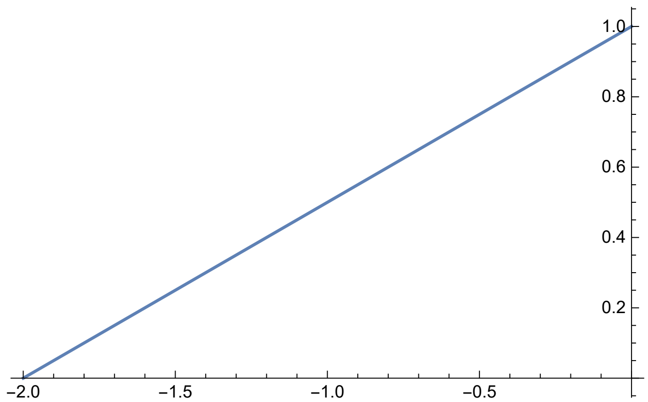
Out[ ]= $|\partial_y g[y]| = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y}}\right|$

dividiamo il dominio X Y in 2 tratti:

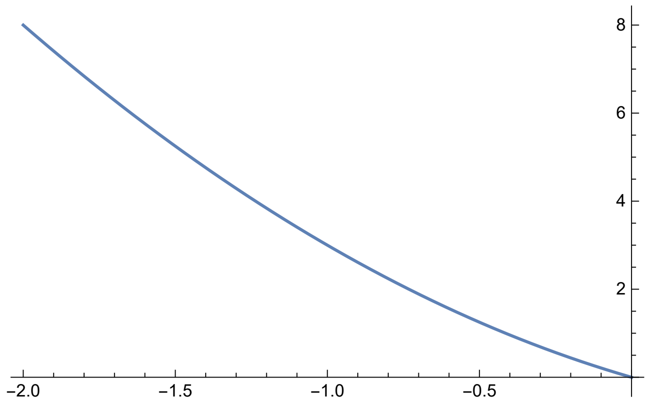
Out[ ]= $\{\{-2 \le x < 0\}, \{4 \ge y > 0\}\}$

Out[ ]= $\{\{0 \le x < 1\}, \{0 \ge y > -1\}\}$

Out[ ]= $\{\{1 \le x \le 2\}, \{-1 \le y \le 0\}\}$



Out[ ]=

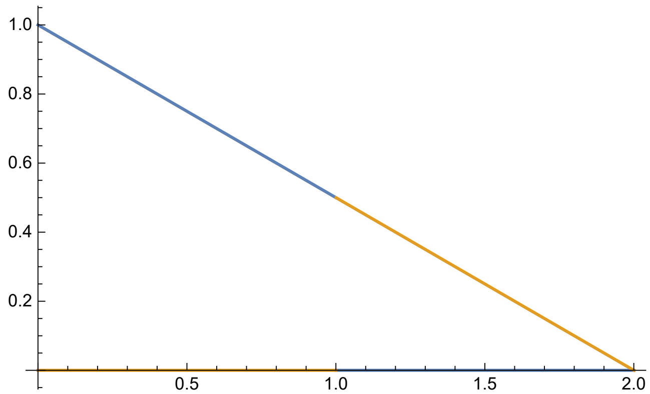


Out[ ]= $\{\{-2 \leq x < 0\}, \{4 \geq y > 0\}\}$

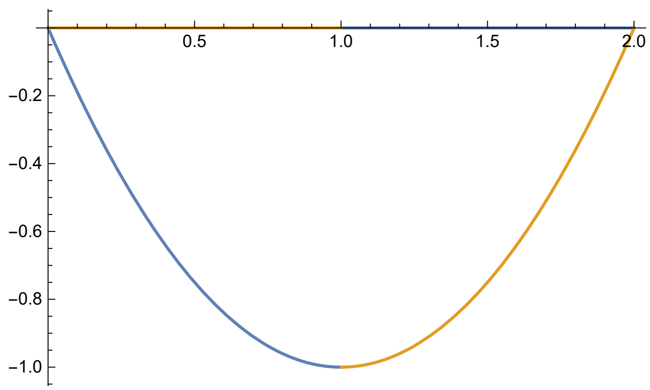
Out[ ]= $px[x] = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$

Out[ ]= $g[y] = 1 - \sqrt{1 + y}$

Out[ ]= $py[y] = px\left[1 - \sqrt{1 + y}\right] . \frac{1}{2\sqrt{1+y}} = -\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{1+y}\right)}{2\sqrt{1+y}}$



Out[ ]=



Out[ ]= $\{\{1 \le x \le 2\}, \{-1 \le y \le 0\}\}$

Out[ ]= $px[x] = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$

Out[ ]= $g[y] = \pm\sqrt{1+y} + 1$

Out[ ]= $py[y] = px\left[1-\sqrt{1+y}\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+y}} + px\left[1+\sqrt{1+y}\right] \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+y}} =$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{1+y}\right)\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+y}} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{1+y}\right)\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+y}}$$

b) Si calcoli la funzione di densità di probabilità congiunta della v.a. (X,Y)

X ed Y NON sono statisticamente indipendenti!

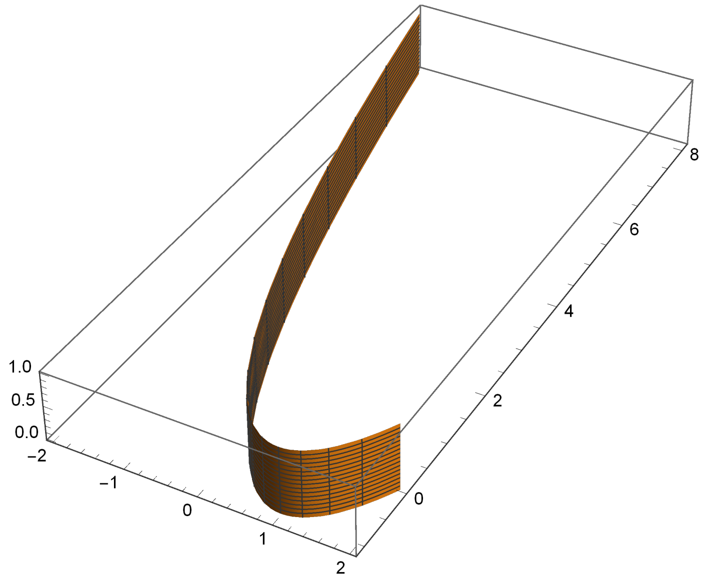
Out[ ]= $p_{XY}[x, y] = p_X[x]\, p_{Y|X}[y \mid x]$

Y noto X è un evento certo: y = x(x-2)

Out[ ]= $p_{Y|X}[y \mid x] = \delta[y - f[x]] = \delta\left[y - x\,(x-2)\right]$

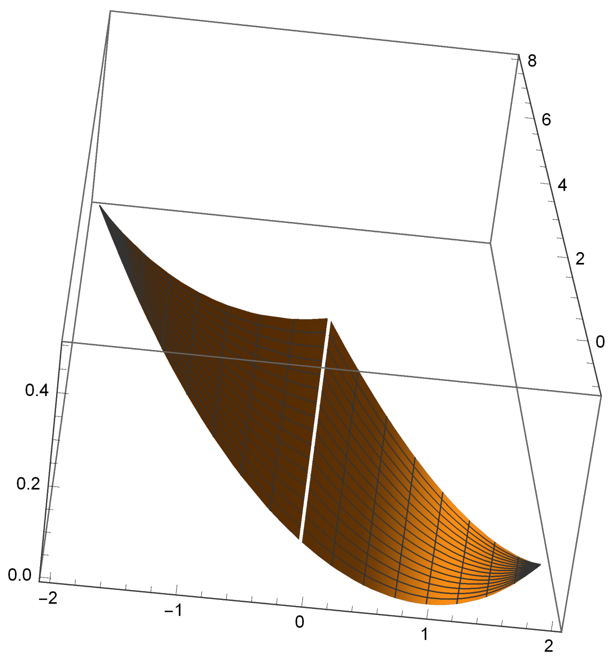
nota: δ[y-x (x-2)] è un foglio matematico:

Out[ ]=



Out[ ]= $p_{XY}[x, y] = p_X[x]\, p_{Y|X}[y \mid x] = \frac{1}{2}.\mathrm{tri}_2[x]\, \delta\left[y - x\,(x-2)\right]$

Out[ ]=



c) Si calcoli il valore atteso di Y

Per calcolare my dovremmo calcolare il seguente integrale:

Out[ ]= $m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y\, p_y[y]\, dy$

La funzione py è piuttosto complicata. E' molto più diretto integrare rispetto alla densita di probabilità della congiunta:

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, p_{XY}[x, y]\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, \frac{1}{2}.\mathrm{tri}_2[x]\, \delta\left[y - x\,(x-2)\right]\, dx\, dy$$

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}.\mathrm{tri}_2[x]\, \left(\int_{-\infty}^{\infty} y\, \delta\left[y - x\,(x-2)\right]\, dy\right) dx$$

In[ ]:= $m_y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}.\mathrm{tri}_2[x]\, \left(x\,(x-2)\right)\, dx =$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} (1/2 + x/4)\, \left(x\,(x-2)\right)\, dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} (1/2 - x/4)\, \left(x\,(x-2)\right)\, dx$$

Out[ ]= $m_y = \frac{1}{3}$